

УДК 550.34:622.276

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТА ПО ДИНАМИКЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЗАКАЧКУ ЖИДКОСТИ

© 2026 г. Н.А. Барышников^{1, *}, С. Б. Турунтаев^{1, 2, **}¹Институт динамики геосфер имени академика М. А. Садовского РАН, Москва, Россия²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: baryshnikov.na@idg.ras.ru

**E-mail: stur@idg.ras.ru

Рассматривается возможность оценки параметров напряжённого состояния пласта по динамике возникновения микросейсмических событий, сопровождающих закачку жидкости в пористый коллектор. Работа основана на статистическом моделировании микросейсмичности, обусловленной ростом порового давления в массиве, находящемся в состоянии фрикционного равновесия. Анализируется связь формы кривых зависимости числа событий от порового давления с параметрами тензора напряжений и характеристиками ориентационного распределения потенциальных плоскостей скольжения. Показано, что динамика микросейсмической активности характеризуется наличием локальных максимумов, соответствующих касанию окружностей Мора критерием Мора–Кулона, что позволяет связать их положения с параметрами напряжённого состояния среды, в частности с величиной промежуточного главного напряжения. Установлено, что при умеренной анизотропии ориентаций плоскостей скольжения и достаточном числе зарегистрированных событий параметры промежуточного главного напряжения и коэффициент Лодэ–Надаи могут быть восстановлены с высокой точностью. В то же время при высокой анизотропии ориентаций локальные максимумы становятся слабо различимыми, что приводит к существенному снижению информативности кривых микросейсмической активности. Полученные результаты демонстрируют возможность использования формы кривых микросейсмической активности для первичной оценки напряжённого состояния пласта и величин горизонтальных напряжений по данным микросейсмического мониторинга, а также для анализа достоверности получаемых оценок в зависимости от качества и объёма наблюдений.

Ключевые слова: микросейсмичность, закачка жидкости, поровое давление, напряжённое состояние пласта, тензор напряжений, промежуточное главное напряжение, коэффициент Лодэ–Надаи, критерий Мора–Кулона, статистическое моделирование, ориентация трещин, индуцированная сейсмичность.

Для цитирования: Барышников Н.А., Турунтаев С.Б. Оценка напряженного состояния пласта по динамике возникновения микросейсмических событий, сопровождающих закачку жидкости // Динамические процессы в геосферах. 2026. Т. 18. № 1. С. 31–52. https://doi.org/10.26006/29490995_2026_18_1_31

Введение

Оценка напряженного состояния горного массива на основе данных микросейсмического мониторинга является актуальной задачей современной прикладной геофизики. При закачке жидкости в пласт происходит рост порового давления, что приводит к снижению эффективных напряжений и изменению условий прочности на существующих трещинах и разрывных нарушениях. В результате даже небольшие изменения давления могут выводить отдельные участки массива из устойчивого состояния, вызывая микросейсмические события, связанные с локальными сдвигами и перераспределением напряжений в среде [Адушкин, Турунтаев, 2015; Ellsworth, 2013; Shapiro, 2015].

Индукцированная сейсмичность при этом носит выражено неоднородный характер как в пространстве, так и во времени. Это связано с особенностями строения трещинной среды и распределением напряжений в массиве. Активизация отдельных трещин определяется их ориентацией относительно главных напряжений, параметрами трения и уровнем порового давления. По мере закачки в процесс последовательно вовлекаются разные группы трещин, что определяет наблюдаемую динамику микросейсмических событий. Таким образом, эта динамика отражает совокупное действие гидромеханических процессов и содержит информацию о напряженном состоянии и структуре массива.

Анализ изменения микросейсмической активности во времени важен как с практической точки зрения – для обеспечения безопасности и эффективности разработки месторождений, – так и с научной. Такие данные могут использоваться для решения обратной задачи восстановления параметров напряженного состояния и механических свойств среды. В связи с этим разработка методов интерпретации микросейсмических наблюдений, учитывающих связь между динамикой событий и напряженным состоянием, представляет собой актуальную задачу и может дополнить традиционные подходы, основанные на скважинных измерениях и анализе механизмов очагов землетрясений.

В практической геомеханике разработан широкий спектр методов оценки напряжённого состояния горных пород, различающихся по физической природе, масштабу применимости и характеру используемых данных. При этом в современной литературе подчёркивается, что задача восстановления тензора напряжений практически никогда не может быть корректно решена на основе одного метода: скважинные наблюдения отражают локально возмущённое поле напряжений, керновые исследования фиксируют эффекты разгрузки и истории деформации, а тектонофизические данные характеризуют региональный и структурный контексты. В связи с этим наибольшей достоверностью обладают подходы, основанные на совместной интерпретации нескольких независимых индикаторов напряжённого состояния [Ljunggren et al., 2003; Schmitt et al., 2012].

К числу наиболее широко используемых методов относятся скважинные подходы, основанные на анализе разрушения стенок скважины. В рамках этой методики интерпретируются вывалы (*borehole breakouts*), возникающие при превышении прочности на сжатие, и индуцированные бурением трещины растяжения (*drilling-induced tensile fractures*), формирующиеся при переходе кольцевых напряжений в область растяжения. Геометрия этих структур позволяет определять ориентации главных горизонтальных напряжений, а при наличии дополнительной информации о давлении, прочности пород и траектории ствола – оценивать диапазоны их величин. Развитие методов высокоразрешающего имиджерного каротажа сделало данный подход основным инструментом оценки напряжений на масштабе скважины, а его методическая база сформирована в работах [Zoback et al., 1985; Plumb, Hickman, 1985; Moos, Zoback, 1990; Peška, Zoback, 1995; Brudy, Zoback, 1999] и обобщена в более поздних исследованиях [Zoback et al., 2003]. Важным дополнением к этим методам являются гидромеханические исследования, прежде всего минигидро разрыв пласта, позволяющий непосредственно оценивать величину минимального главного напряжения по параметрам раскрытия и закрытия трещины [Haimson, Cornet, 2003].

Альтернативное направление представляют специальные керновые методы, в которых информация о напряжённом состоянии извлекается из самого керна. Эти подходы основаны на анализе разгрузочных деформаций и анизотропии упругих свойств, возникающих при извлечении образца из массива. К числу основных керновых методов относятся подходы, основанные на анализе неупругого восстановления деформаций (*anelastic strain recovery*, ASR) [Warpinski, Teufel, 1989; Matsuki, Takeuchi, 1993; Matsuki, 2008; Lin et al., 2006], акустико-эмиссионные методики, использующие эффект Кайзера [Lavrov, 2003], а также методы, опирающиеся на измерение деформации и изменения формы керна после разгрузки (в частности, DCDA) [Funato, Ito, 2017]. Эти методы позволяют получать локальные оценки напряжённого состояния на конкретных глубинах и служат важным независимым источником информации для уточнения и калибровки результатов, получаемых по данным скважинных наблюдений. Их применение и интерпретация подробно рассмотрены в ряде обобщающих работ, посвящённых фундаментальным принципам анализа керновых данных [Ljunggren et al., 2003; Schmitt et al., 2012].

Третью важную группу составляют тектонофизические методы, основанные на анализе природных трещин, разломов и механизмов очагов землетрясений. В этих подходах предполагается, что направление смещения по разлому согласуется с направлением действующего касательного напряжения, что позволяет по совокупности наблюдаемых структур восстанавливать ориентации главных осей и форму тензора напряжений. Основы данного направления были заложены в работах [Angelier, 1979; Angelier, 1990; Michael, 1984; Gephart, Forsyth, 1984], а дальнейшее развитие связано с интеграцией различных индикаторов напряжений в рамках глобальных проектов, таких как World Stress Map [Zoback, 1992]. Существенным является и развитие методов анализа неоднородных и многокомпонентных наборов данных, включая подходы множественной инверсии [Yamaji, 2000] и критический анализ применимости палеонапряжений к современному состоянию среды [Lacombe, 2012]. Особое значение имеют работы, связывающие региональные тектонические напряжения с локальными скважинными наблюдениями, например, [Barton, Zoback, 1994], где рассматриваются возмущения поля напряжений вблизи активных разломов, пересечённых скважинами.

С методической точки зрения перечисленные подходы не являются альтернативными, а образуют взаимодополняющую систему. Тектонофизические методы задают региональный и структурный контексты напряжённого состояния, скважинные наблюдения обеспечивают детализированную информацию на масштабе ствола скважины, а керновые исследования позволяют получать локальные количественные оценки и независимую проверку результатов. Их совместное использование позволяет существенно повысить достоверность реконструкции параметров напряжённого состояния, компенсируя ограничения каждого отдельного метода. Именно поэтому современная практика оценки пластовых напряжений ориентирована на интеграцию разнородных данных и разработку новых подходов, способных дополнить существующий набор диагностических признаков [Schmitt et al., 2012].

В последние годы существенное развитие получили методы восстановления напряжённого состояния по данным о трещиноватости, основанные на статистическом и стохастическом анализе ориентировок и свойств трещин. В отличие от классических тектонофизических подходов, эти методы формулируются как обратные задачи, в которых параметры тензора напряжений определяются на основе сопоставления наблюдаемых характеристик трещинных систем с результатами численного моделирования или вероятностных оценок. В данной области сформировалось несколько взаимосвязанных направлений, включающих стохастическую инверсию по ориентировкам трещин, методы кластеризации и разделения неоднородных наборов данных, а также байесовские подходы к анализу сейсмологических наблюдений [Arnold, Townend, 2007; Yamaji et al., 2010; Yamaji, Sato, 2011].

Важным этапом развития этих методов стало введение формализованных статистических моделей ориентировок трещин, рассматривающих их как случайные величины на сфере. В рамках таких подходов используются различные распределения направлений, позволяющие учитывать как наличие предпочтительных ориентаций, так и многомодальность трещинных систем. Показано, что корректное описание распределения ориентировок играет ключевую роль при решении обратной задачи, определяя её устойчивость и разрешающую способность, особенно в условиях ограниченности и зашумлённости исходных данных [Yamaji, Sato, 2011; Maerten et al., 2016].

Отдельное направление связано с развитием геомеханически обоснованных методов инверсии, в которых параметры напряжённого состояния определяются не только из геометрии трещин, но и с учётом их механического поведения. В таких постановках используется численное моделирование напряжённо-деформированного состояния и анализ соответствия между наблюдаемыми и модельными характеристиками трещинных систем, что позволяет учитывать неоднородность напряжённого поля и влияние локальных факторов [Maerten et al., 2016].

В отечественной литературе данные подходы получили развитие в работах, посвящённых восстановлению напряжённого состояния по данным о природных и техногенных трещинах и их гидравлической проводимости. В частности, предложены методы, в которых для построения синтетических ансамблей трещин используется распределение Фишера, задающее концентрацию

ориентировок вокруг оптимально ориентированной плоскости скольжения. Такие модели позволяют формализовать связь между геометрией трещинной системы и параметрами напряжённого состояния и использовать её для решения обратной задачи [Dubinya, Tikhotskiy, 2022]. Показано, что данная задача в общем случае является некорректной и может иметь множество близких решений, что требует использования статистических критериев и анализа устойчивости.

Дальнейшее развитие этого направления связано с применением методов Монте-Карло и вероятностной интерпретацией результатов инверсии. В этих работах формируется ансамбль допустимых состояний напряжений, согласующихся с наблюдаемыми данными, что позволяет оценивать не только наиболее вероятные значения параметров, но и их неопределённость [Ziganshin et al., 2024; Dubinya et al., 2025]. Особое внимание уделяется анализу чувствительности решений к качеству исходных данных и устойчивости обратной задачи при их деградации [Novikova, Dubinya, 2024].

Параллельно развивается направление, ориентированное на использование данных о проводимости трещин и гидрогеологических индикаторов, позволяющее оценивать параметры напряжённого состояния и коэффициенты трения пород на основе анализа функционирования естественных трещинных систем [Zhang et al., 2023]. Эти подходы по своей сути являются развитием более ранних работ, в которых инверсия напряжений выполняется по данным о проводящих трещинах и их ориентировках в скважинах [Ito et al., 2002].

Современные статистические и стохастические методы анализа трещиноватости формируют самостоятельное направление исследований, дополняющее как классические тектонофизические, так и скважинные подходы. Их развитие, включая работы отечественных авторов, показывает, что использование направленных распределений, методов Монте-Карло и вероятностных моделей позволяет не только решать задачу восстановления напряжённого состояния, но и явно учитывать неопределённость исходных данных и неоднозначность получаемых решений. Близкая по физической постановке задача возникает и при анализе индуцированной микросейсмичности, где наблюдаемые события отражают потерю устойчивости трещин при изменении эффективных напряжений, что позволяет использовать аналогичный статистический аппарат для интерпретации параметров напряжённого состояния по данным микросейсмического мониторинга.

Целью данной работы является оценка возможности восстановления параметров напряжённого состояния пласта по динамике возникновения микросейсмических событий, сопровождающих закачку жидкости. В отличие от традиционных подходов, основанных на прямых или косвенных измерениях напряжений, в работе используется статистическая интерпретация микросейсмичности как отклика ансамбля потенциальных плоскостей скольжения на изменение эффективных напряжений. Предполагается, что индуцированные микросейсмические события соответствуют актам потери устойчивости отдельных трещин, и их совокупность отражает геометрию и напряжённое состояние трещинной системы. Для описания этого процесса применяется статистический (Монте-Карло) подход, в рамках которого моделируется эволюция микросейсмической активности на ансамбле трещин-инициаторов с заданным распределением ориентировок при росте порового давления [McClure, 2012; Arnold, Townend, 2007; Yamaji et al., 2010; Dubinya, Tikhotskiy, 2022]. Такая постановка позволяет напрямую связать характеристики наблюдаемой микросейсмичности с параметрами тензора напряжений и опирается на методы, ранее разработанные для анализа трещиноватости, включая использование направленных распределений и вероятностных моделей [Yamaji, Sato, 2011; Ziganshin et al., 2024; Dubinya et al., 2025].

Моделирование проводилось в несколько этапов. На первом этапе задавался расчётный «куб» параметров моделирования: главные компоненты и ориентация тензора напряжений, фрикционные свойства и параметры распределения ориентировок нормалей к плоскостям трещин-инициаторов. Подобная постановка соответствует подходам, используемым в задачах стохастической инверсии напряжений по трещиноватости, где геометрия ансамбля трещин рассматривается как ключевой фактор, определяющий отклик системы [Yamaji et al., 2010; Dubinya, Tikhotskiy, 2022]. Далее для

каждой комбинации этих величин строился тензор напряжений и формировался ансамбль из заданного количества трещин-инициаторов с распределением ориентировок, аналогичным применяемому в задачах моделирования трещинных систем [Yamaji, Sato, 2011].

Поровое давление изменялось от начального гидростатического значения до уровня наименьшего главного напряжения. На каждом шаге изменения давления пересчитывались эффективные нормальные и касательные напряжения на всех плоскостях из ансамбля трещин-инициаторов. В качестве критерия возникновения события использовался критерий Мора–Кулона [Byerlee, 1978], записанный через эффективные напряжения, что соответствует общепринятому описанию условий сдвиговой неустойчивости трещин в геомеханике [Zoback, 2007]. Микросейсмические события фиксировались в те моменты, когда комбинация напряжений и текущего порового давления для какой-либо трещины-инициатора удовлетворяла критерию сдвига [McClure, 2012; Ellsworth, 2013; Shapiro, 2015].

В результате для каждой точки параметрического пространства был получен набор кривых: «число событий – поровое давление», впоследствии использованный для оценки ошибок восстановления минимального горизонтального напряжения и коэффициента Лоде–Надаи. Подобный анализ опирается на представление о связи параметров тензора напряжений с характеристиками трещинных ансамблей и их откликом на изменение порового давления [Zoback, 2007; Arnold, Townend, 2007; Ziganshin et al., 2024]. Вычисления проводились при помощи математических библиотек Python. В следующих разделах статьи представлено подробное описание процесса моделирования и его результатов.

Методика моделирования

В рамках данной работы была рассмотрена задача об эволюции микросейсмичности в процессе закачки жидкости на глубине в пласт, находящийся в условиях начального фрикционного равновесия, то есть такого напряжённого состояния, при котором сдвиговое напряжение на потенциальных плоскостях скольжения близко к критическому значению, но ещё не приводит к самопроизвольному разрушению [Zoback, 2007]. Максимальное главное напряжение считалось направленным вертикально и определялось литостатическим давлением $\sigma_1 = \sigma_v = \rho_s gh$, где ρ_s – плотность горной породы. Такое допущение соответствует сбросовой обстановке, в которой вертикальное напряжение является максимальным главным, хотя в более общем случае соотношение между главными напряжениями может отличаться. Горизонтальные главные компоненты тензора напряжений $\sigma_2 = \sigma_H$ и $\sigma_3 = \sigma_h$ вычислялись из условия фрикционного равновесия и заданной величины коэффициента Лоде–Надаи: $r = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$, который задаёт относительное положение σ_2 между σ_1 и σ_3 . Поровое давление задавалось детерминированной функцией времени $p(t)$ и менялось линейно от гидростатического на данной глубине $p(0) = \rho_f gh$ до величины минимального горизонтального напряжения σ_h , где ρ_f – плотность флюида.

Условие фрикционного равновесия заключается в том, что эффективная окружность Мора для пары главных эффективных напряжений σ_1' , σ_3' лишь касается прямой критерия Мора–Кулона $\tau = \mu \sigma_n' + C$. При заданном максимальном эффективном напряжении $\sigma_1' = \sigma_1 - p(0)$ и известных коэффициенте трения μ и когезии C минимальное эффективное напряжение σ_3' определяется из геометрического условия касания:

$$\sigma_3' = \frac{(\sqrt{1+\mu^2} - \mu)\sigma_1' - 2C}{\sqrt{1+\mu^2} + \mu},$$

из чего затем можно определить минимальное главное (в нашем случае горизонтальное) напряжение $\sigma_3 = \sigma_h = \sigma_3' + p(0)$. Промежуточное главное напряжение (в нашем случае σ_H) берётся как $\sigma_2 = \sigma_H = \sigma_3 + r(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Генерация ансамбля трещин-инициаторов выполнялась в рамках стохастической постановки с использованием направленных распределений на сфере; при этом для задания ориентировок

нормалей использовалась стандартная схема моделирования распределения Фишера/von Mises–Fisher [Wood, 1994], широко применяемая в задачах анализа трещиноватости [Pakyuz-Charrier et al., 2018; Dubinya, Tikhotskiy, 2022]. Механические параметры ансамбля трещин задавались фиксированными значениями коэффициента трения μ и когезии C . Ориентации нормалей трещин-инициаторов (рис. 1) были распределены в соответствии со сферическим распределением Фишера [Fisher, 1953]:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\kappa}{4\pi \sinh(\kappa)} \exp(\kappa \cos \theta),$$

где θ – полярный угол от среднего направления, φ – азимут, κ – параметр кучности (рис. 2).

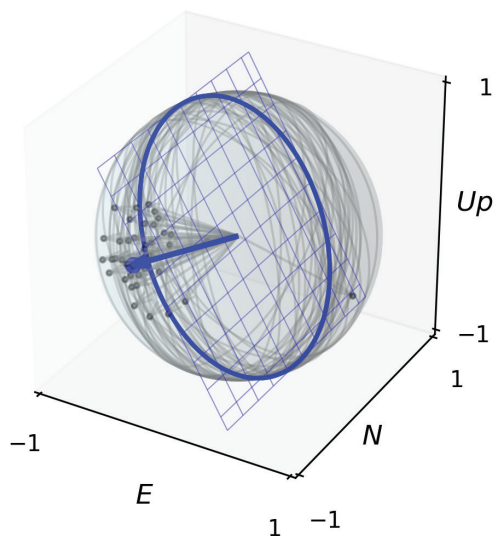


Рис. 1. Пример ансамбля трещин-инициаторов, $\kappa = 5$. Толстыми линиями показано пересечение критической плоскости с единичной окружностью, а также и среднее направление нормали ансамбля трещин для одного из сопряженных углов

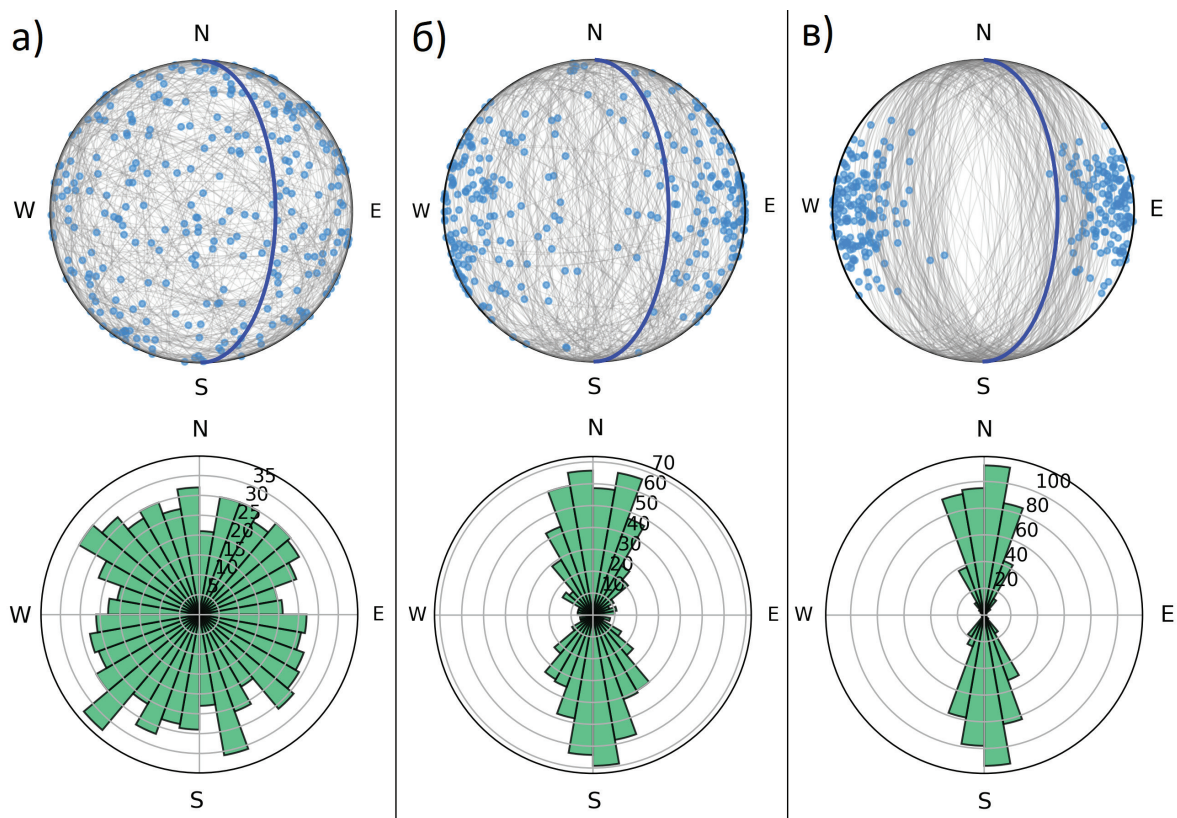


Рис. 2. Стереогаммы и розы направлений для ансамблей трещин-инициаторов с различным параметром кучности: а – $\kappa = 0.01$, б – $\kappa = 5$, в – $\kappa = 15$. Коэффициент Лодэ–Надаи r во всех случаях равен 0.2

Средний вектор нормали был ориентирован перпендикулярно критической плоскости скольжения – той плоскости, на которой реализуется максимальное соотношение касательного и нормального напряжений для данного тензора напряжений. Тем самым ансамбль трещин был сосредоточен вокруг наиболее потенциально неустойчивой ориентации, что соответствует первоначальной «предрасположенности» пласта к сдвиговой деформации [Zoback, 2007]. Коэффициент трения μ определяет критический угол между нормалью $\mathbf{n}^{(p)}$ критической плоскости скольжения и осью максимального главного напряжения:

$$\alpha = \pi / 4 + 1 / 2 \arctg \mu .$$

При этом сама нормаль $\mathbf{n}^{(p)}$ в системе главных осей имеет компоненты $(\cos \alpha, 0, \pm \sin \alpha)$; знак « \pm » даёт две сопряжённые плоскости.

Использование критической плоскости скольжения в качестве среднего направления распределения ориентировок соответствует принятым в стохастических моделях трещинных систем подходам, в которых рассматриваются преимущественно критически нагруженные или гидравлически проводящие трещины [Ito et al., 2002; Dubinya, Tikhotskiy, 2022]. Такая постановка представляет собой осознанное упрощение: учёт произвольных или многомодальных распределений ориентировок существенно усложняет структуру обратной задачи и требует большего объёма наблюдаемых данных. Выбор коэффициента трения влияет на ориентацию критической плоскости скольжения и, соответственно, на геометрию синтетического ансамбля трещин. В настоящей работе коэффициент трения задаётся фиксированным, что позволяет исключить дополнительную степень свободы из постановки задачи; анализ его вариаций требует отдельного рассмотрения.

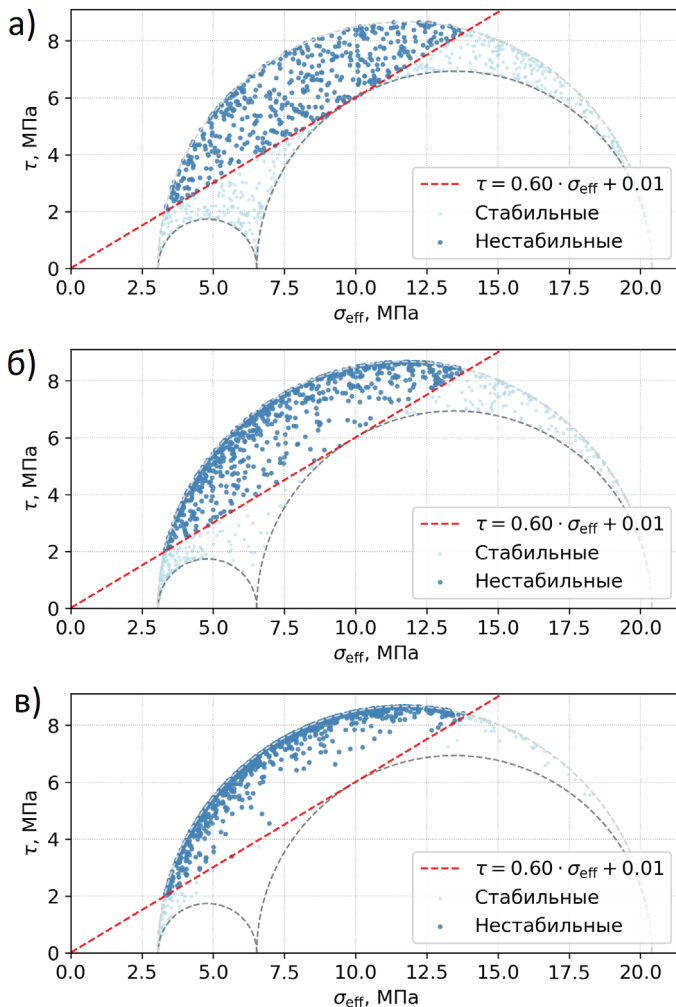


Рис. 3. Пример диаграммы Мора для некоторого порового давления для ансамблей трещин-инициаторов с различным параметром кучности: а – $\kappa = 0.01$, б – $\kappa = 5$, в – $\kappa = 15$. Каждая точка на диаграмме представляет отдельную трещин-инициатор, ярким цветом показаны нестабильные трещины, для которых при данном поровом давлении выполнялся критерий Мора–Кулона (пунктирная линия). Коэффициент Лоде–Надаи r во всех случаях равен 0.2. При увеличении параметра кучности точки сосредотачиваются вблизи критической плоскости скольжения, соответствующей точке первого касания прямой критерия Мора–Кулона большим кругом

Временная эволюция микросейсмичности определялась изменением количества «стабильных» плоскостей трещин из ансамбля под действием растущего порового давления. На каждом шаге изменения давления рассчитывались эффективные нормальные и касательные напряжения на всех плоскостях из ансамбля трещин-инициаторов (метод расчёта подробно описан в Приложении 1). Эффективное нормальное напряжение на i -й плоскости в момент времени t определяется как $\sigma_{n,i}'(t) = \sigma_{n,i} - p(t)$. На каждом шаге для каждой плоскости вычислялась временная функция критерия Мора–Кулона: $F_i(t) = \tau_i - \mu\sigma_{n,i}'(t) - C$. При условии $F_i(t_0) < 0$ функция $F_i(t)$ возрастает линейно с $p(t)$ и пересекает ноль ровно один раз. Момент t_i^* появления события находится из условия $F_i(t_i^*) = 0$; если $F_i(t_0) \geq 0$, плоскость считалась уже нестабильной и в расчёт новых событий не включалась. Для определения возникновения событий на дискретной временной сетке $t_m = t_0 + m\Delta t$ вводился индикатор первого превышения

$$\Theta_i(t_m) = \begin{cases} 1, & F_i(t_m) > 0, F_i(t_{m-1}) \leq 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

который помещает единицу только в тот шаг, где трещина потеряла устойчивость впервые. Такой подход соответствует учёту первичного акта разрушения и согласуется с интерпретацией, аналогичной эффекту Кайзера [Lavrov, 2003]. Число микросейсмических событий, произошедших на шаге t_m , получалось суммированием по всем плоскостям

$$E(t_m) = \sum_{i=1}^M \Theta_i(t_m).$$

Набор величин $E(t_m)$ образует временной ряд микросейсмической активности, а его нормированная форма $\hat{E}(t_m) = \frac{E(t_m)}{\sum_m E(t_m)}$ служит эмпирической плотностью вероятности события по времени и позволяет сопоставлять расчётную эволюцию микросейсмичности с наблюдаемыми данными независимо от общего числа событий (рис. 4).

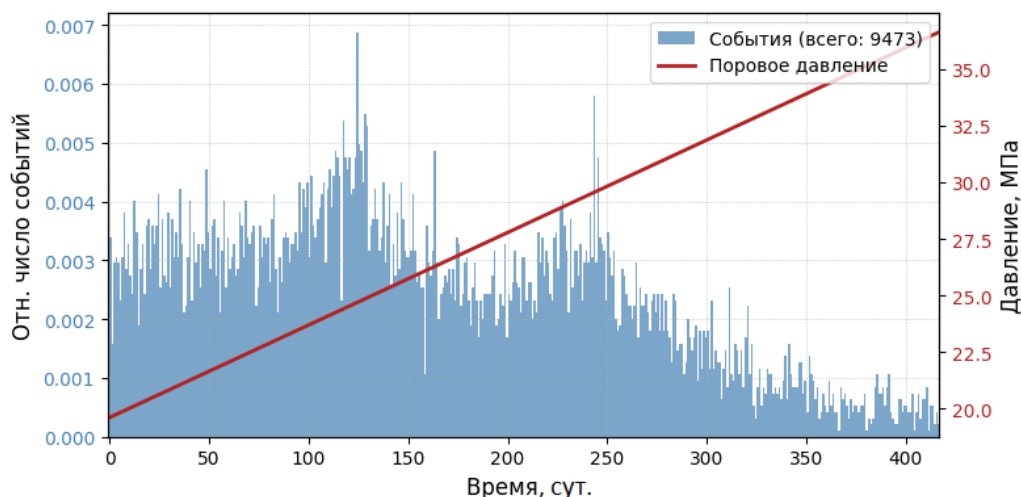


Рис. 4. Пример модельной зависимости плотности количества событий от времени

В Табл. 1 представлен весь набор использованных параметров моделирования. Для каждой комбинации параметров была построена «гладкая» кривая зависимости плотности вероятности возникновения события от порового давления. Для этого было использовано «большое» количество

трещин-инициаторов ($\sim 10^6$ ед.), полученная кривая количества событий нормировалась на их общее количество. Далее каждая «гладкая» кривая использовалась для ресемплирования кривых с заданным ограниченным числом событий (от сотен до десятков тысяч) – так имитировались данные разного качества. Для этого использовалось многомерное биномиальное распределение с плотностью вероятности в виде «гладкой» кривой.

Таблица 1.

Параметры модели

Параметр	Обозначение	Значение
Постоянные параметры модели		
Плотность породы, кг/м ³	ρ_s	2300
Плотность флюида, кг/м ³	ρ_f	1000
Коэффициент сцепления (когезия), МПа	C	0.01
Коэффициент трения	μ	0.6
Глубина, м	h	2000
Варьируемые параметры модели		
Параметр кучности в распределении Фишера	k	0.01, 0.1, 1, 5, 10, 25, 50
Коэффициент Лоде-Надаи	r	0.05, 0.1, 0.15, 0.2
Суммарное число событий	N_{events}	100, 500, 1000, 5000, 10000, 20000, 50000

Параметры разделены на «постоянные» – общие для всех расчетов и «варьируемые» – формирующие расчётный «куб». Расчёты проводились со всеми возможными комбинациями варьируемых параметров.

Результаты моделирования

На рис. 5 показан пример результата моделирования – «гладкие» зависимости относительного числа событий от порового давления для трех различных величин параметра кучности и двух величин коэффициентов Лоде–Надаи. Кривые построены по описанной ранее методике для большого числа трещин-инициаторов ($\sim 10^6$ ед.).

Форма полученных кривых определяется в первую очередь параметром кучности k . При малых значениях этого параметра (например, $k = 0.01$) ориентации нормалей трещин-инициаторов практически изотропны, что выражается в достаточно равномерном распределении событий по всей области изменения порового давления за исключением одного или двух выраженных локальных максимумов. Большие величины k приводят к увеличению анизотропности: нормали начинают концентрироваться вблизи границы большого круга Мора вокруг критической плоскости скольжения. В результате этого увеличивается доля событий, возникающих на начальных этапах роста давления (начальное давление по условию задачи соответствует моменту касания критерием Мора–Кулона большого круга Мора ($\sigma_3 - \sigma_1$)), что проявляется в выраженном начальном пике и более крутом последующем её спаде. По мере увеличения порового давления эффективные нормальные напряжения снижаются, при этом касательные напряжения остаются неизменными. Это приводит к смещению центров кругов Мора в сторону меньших нормальных напряжений. В момент касания каждого из малых кругов критерием Мора–Кулона наблюдается появление выраженного локального

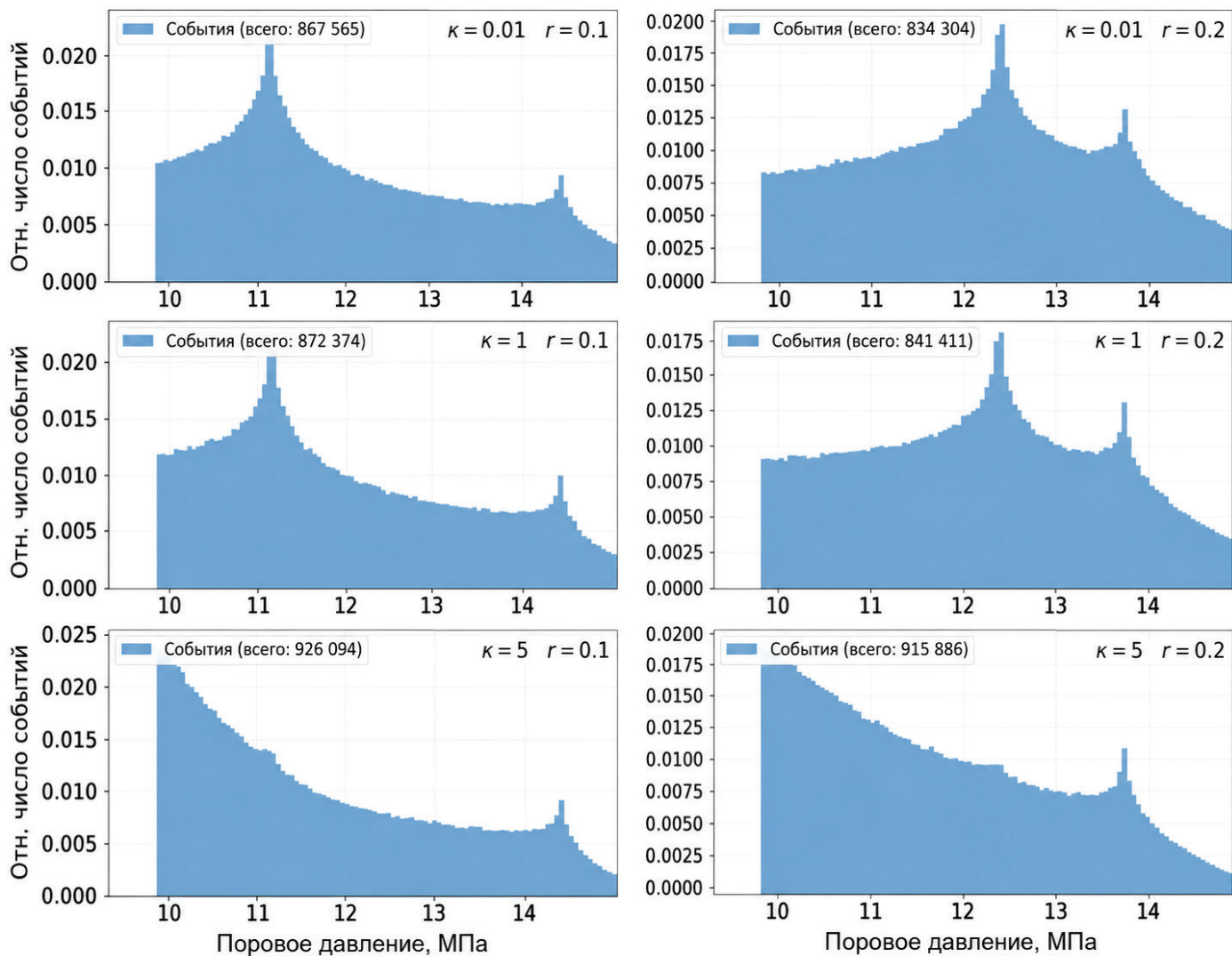


Рис. 5. Зависимости относительного числа событий от порового давления для трех различных величин параметра кучности ($\kappa = 0.01, 1$ и 5) и двух коэффициентов Лоде–Надаи ($r = 0.1$ или 0.2)

максимума на кривой. Порядок возникновения этих максимумов зависит от величины r : при меньших значениях r первым возникает максимум, соответствующий касанию «правого» малого круга ($\sigma_2 - \sigma_1$), тогда как при больших значениях r первым является максимум от касания «левого» малого круга ($\sigma_3 - \sigma_2$).

Появление локальных максимумов связано с неравномерным отображением распределения ориентаций нормалей трещин-инициаторов в плоскость нормальных и касательных напряжений (рис. 6). Это неравномерное отображение является следствием нелинейности преобразования трёхмерного вектора напряжений в плоскую диаграмму, что подробно обсуждается в Приложении 2.

Форма и положение локальных максимумов на кривых зависимости количества микросейсмических событий от порового давления несут существенную информацию о параметрах напряжённого состояния массива и анизотропии распределения ориентаций трещин, и поэтому может быть использована для восстановления параметров напряжённого состояния массива по наблюдаемой динамике микросейсмичности. В частности, величины поровых давлений, при которых наблюдается локальное увеличение числа событий, могут быть использованы для вычисления величины максимального горизонтального напряжения.

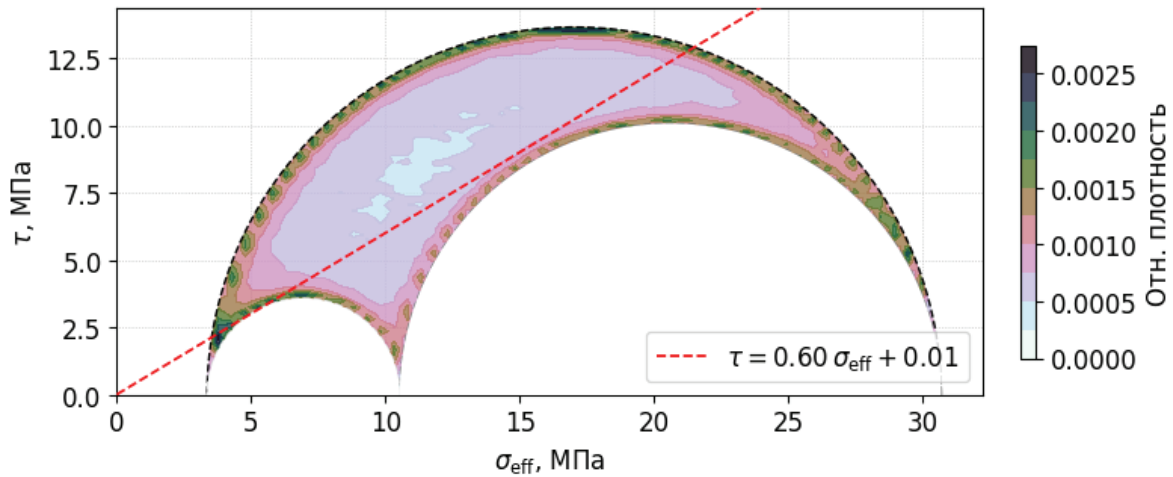


Рис. 6. Относительная плотность трещин-инициаторов на диаграмме Мора при почти изотропном ($\kappa = 0.01$) распределении ориентаций их нормалей в момент касания малого круга ($\sigma_3 - \sigma_2$)

Обозначим величины пиковых поровых давлений, при которых происходят касания малых кругов Мора через P_{31} – при касании большого круга (пары σ_3, σ_1), P_{21} – при касании «правого» малого круга (пары σ_2, σ_1) и P_{32} – при касании «левого» малого круга (пары σ_3, σ_2). Геометрическое условие касания каждого из кругов через эффективные напряжения можно записать как:

$$\mu O_{ij} + C = R_{ij} \sqrt{\mu^2 + 1}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i > j,$$

где $O_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j) / 2$ – центр соответствующей окружности, $R_{ij} = (\sigma_i - \sigma_j) / 2$ – её радиус. Откуда условие касания для большого круга ($\sigma_3 - \sigma_1$) имеет вид:

$$\mu \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - P_{31} \right) + C = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sqrt{\mu^2 + 1}.$$

Аналогично условие для малого ($\sigma_2 - \sigma_1$) круга:

$$\mu \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - P_{21} \right) + C = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sqrt{\mu^2 + 1}.$$

В обеих формулах правая часть пропорциональна радиусу соответствующей окружности Мора, левая часть зависит от центра окружности – средней величины эффективных нормальных напряжений. Вычитая одно выражение из другого получим:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{2\mu(P_{21} - P_{31})}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Также из условия касания для круга ($\sigma_3 - \sigma_1$) можно выразить σ_3 через σ_1 и P_{31} :

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 (\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu) + 2\mu P_{31} - 2C}{(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu)}.$$

Отсюда

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\mu(\sigma_1 - P_{31}) + 2C}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Из данных соотношений можно получить следующее выражение для коэффициента Лоде–Надаи:

$$r = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\mu(P_{21} - P_{31})}{\mu(\sigma_1 - P_{31}) + C}.$$

Данное соотношение выражает коэффициент Лоде–Надаи через максимальное главное напряжение σ_1 , два поровых давления P_{31} , P_{21} , коэффициент трения μ и когезию C . Из условия касания малого ($\sigma_2 - \sigma_1$) круга можно определить величину σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu) + 2\mu P_{21} - 2C}{(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu)}.$$

Учитывая, что по условию задачи $P_{31} = p(0) = \rho_f gh$ – начальное поровое давление, а $\sigma_1 = \rho_s gh$ – литостатическое, это даёт два простых выражения для оценки коэффициента Лоде–Надаи и максимального горизонтального напряжения по величине пикового давления P_{21} :

$$r = \frac{\mu(P_{21} - \rho_f gh)}{\mu gh(\rho_s - \rho_f) + C},$$

$$\sigma_H = \frac{\rho_s gh(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu) + 2\mu P_{21} - 2C}{(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu)}.$$

Концепция метода восстановления промежуточного напряжения по динамике микросейсмических событий

Возможность практического использования указанных соотношений для определения величин промежуточного главного напряжения либо коэффициента Лоде–Надаи зависит от точности нахождения величины пикового давления P_{21} на данных микросейсмического мониторинга. Наиболее существенным ограничением выступает малое суммарное число зарегистрированных событий. Ситуация также осложняется тем, что при определённых значениях коэффициента Лоде–Надаи порядок возникновения локальных максимумов P_{21} и P_{32} может меняться или же они накладываются друг на друга. Существенную роль играет и характер ориентационного распределения трещин-инициаторов. При высоких значениях параметра кучности к увеличению относительной плотности точек на границе кругов Мора становится менее выраженным по сравнению с увеличением их концентрации вблизи выделенного направления.

Для оценки возможности детектирования пика давления P_{21} и соответствующих ему параметров НДС была построена синтетическая выборка кривых зависимости относительной плотности числа событий от давления для различного суммарного числа событий (от 100 до 50000) и различных величин параметров r и k (Табл. 1). На каждой синтетической кривой были детектированы пиковые значения давлений P_{21} и P_{32} . Для этого была программно реализована простая методика. Ряд событий сглаживался фильтром Савицкого–Голея: в каждом окне фиксированной длины выполняется аппроксимация

низко-порядковым полиномом, после чего вместо исходного отсчёта берётся значение этого полинома в центральной точке. Затем к сглаженным данным применялась стандартная процедура нахождения локальных экстремумов библиотеки Python `scipy.signal.find_peaks`, основанная на сравнении последовательных элементов массива в бегущем окне, и определяющая пик по его характерным параметрам (ширина, пороговое превышение над соседними точками и т.д.). Параметры реализованной процедуры поиска локальных пиков настраивались вручную для обеспечения наилучшего результата детекции.

На рис. 7 показан пример распределений относительного числа событий от порового давления для различного суммарного количества зарегистрированных событий. При малом числе событий (до нескольких сотен) кривые характеризуются высокой шумовой компонентой, что затрудняет уверенное выделение характерных пиков. В таких условиях оценки критических давлений имеют большой разброс и могут существенно смещаться. С ростом объёма событий до нескольких тысяч форма кривой становится более гладкой, а локальные максимумы, соответствующие давлениям P_{21} и P_{32} , становятся отчётливо различимыми. Это приводит к значительному снижению разброса оценок и повышению их точности. По результатам детектирования пиковых давлений на синтетических кривых были вычислены и сопоставлены с истинными значения r и σ_2 . На рис. 8 представлены оценки ошибок (стандартных отклонений) восстановления пиковых давлений (r и σ_2) в зависимости от суммарного числа событий.

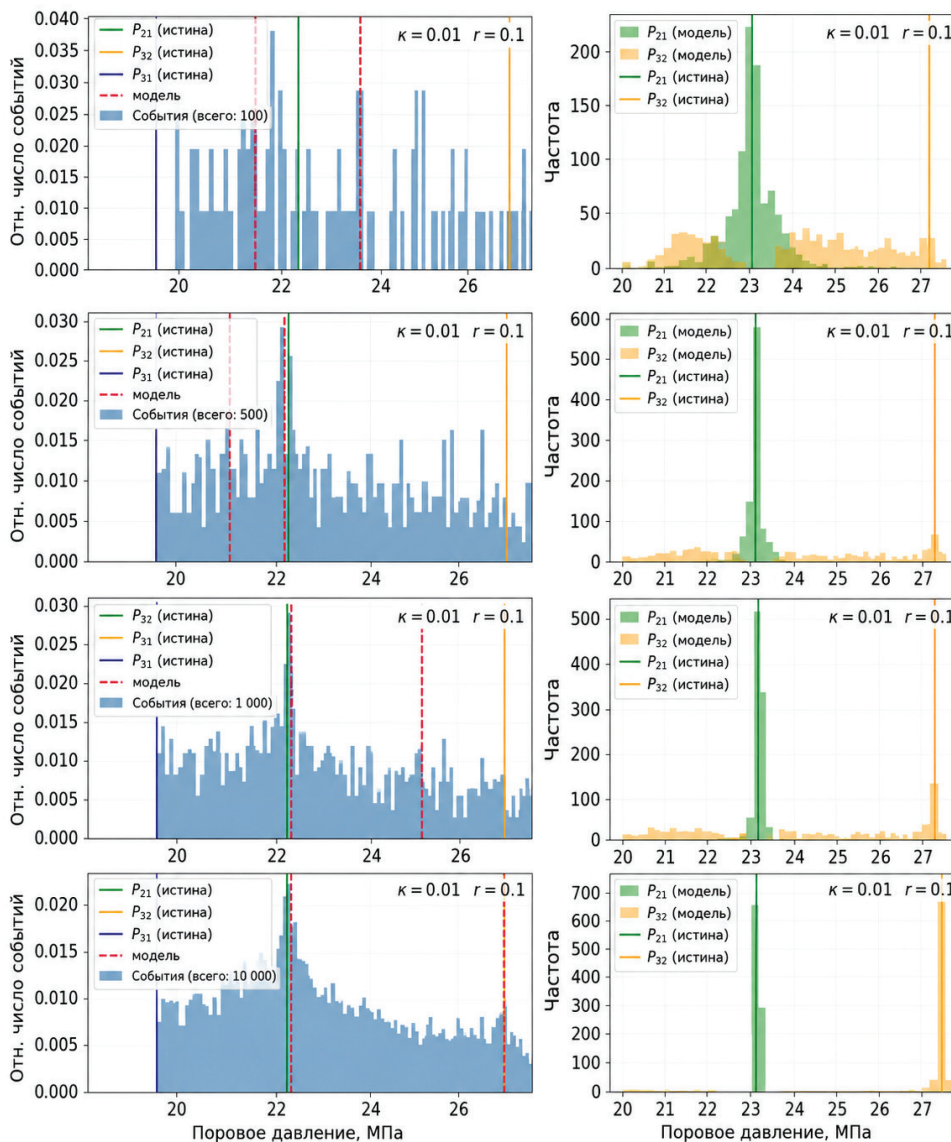


Рис. 7. Влияние суммарного количества зарегистрированных событий на качество детектирования пиковых давлений при почти изотропном распределении нормалей трещин-инициаторов ($\kappa = 0.01$) и коэффициенте $r = 0.1$. Левые панели: нормированные кривые «число событий – поровое давление» для различного суммарного количества событий (100, 500, 1000 и 10000 событий); сплошные вертикальные линии показывают истинные значения P_{21} , P_{32} и P_{31} , пунктирные – результаты автоматической детекции. Правые панели: гистограммы соответствующих распределений детектированных значений пиковых давлений, построенные по выборке из 1000 случайных кривых для каждого суммарного количества событий

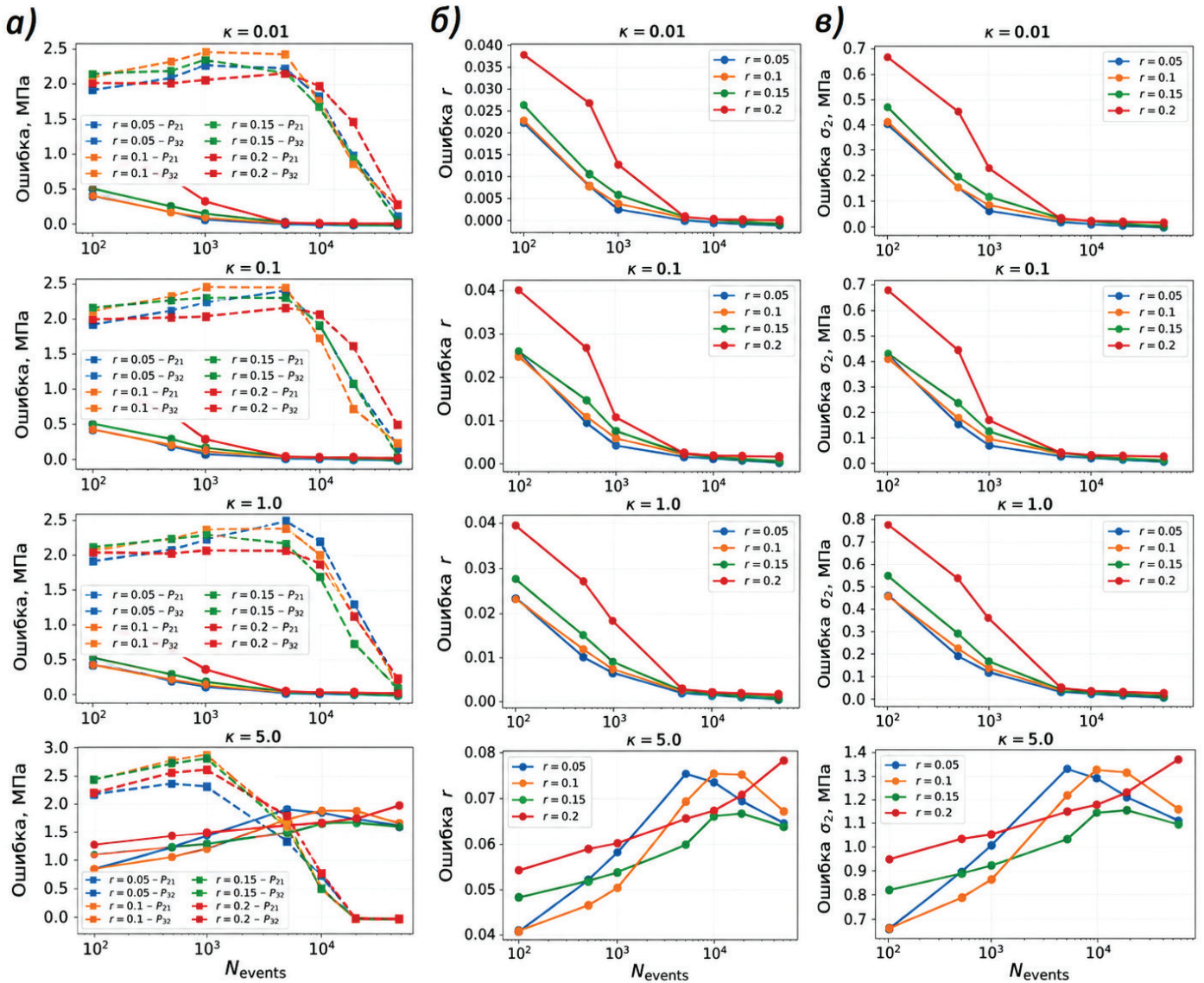


Рис. 8. Зависимость ошибок восстановления параметров напряжённого состояния пласта от общего числа модельных микросейсмических событий N_{events} . Показаны ошибки определения давлений P_{21} и P_{32} (а, левый столбец), коэффициента Лоде–Надаи r (б, центральный столбец) и промежуточного главного напряжения σ_2 (в, правый столбец). Каждый столбец содержит четыре панели для различных значений параметра кучности: $\kappa = 0.01, 0.1, 1, 5$ (сверху вниз). По оси ординат отложена величина стандартного отклонения каждой из величин, вычисленного по выборке из 1000 случайных кривых для каждого суммарного количества событий. Различные цвета кривых соответствуют различным истинным значениям коэффициента r (0.05, 0.1, 0.15, 0.2)

При $\kappa \leq 0.1$ ошибки восстановления параметров монотонно уменьшаются с ростом числа событий. Увеличение выборки от 10^2 до 10^4 приводит к снижению ошибки определения давления P_{21} с ~ 1 до ≤ 0.1 МПа, давления P_{32} – с ~ 2.5 до ≤ 0.1 МПа, промежуточного главного напряжения σ_2 – с ~ 0.9 до ≤ 0.05 МПа, а коэффициента r – с ~ 0.04 до ≤ 0.002 . При $\kappa = 5$ увеличение числа событий практически не влияет на точность. Погрешность определения коэффициента r остаётся на уровне ~ 0.05 , а для σ_2 – в диапазоне 0.8–1.2 МПа.

Это связано с несовершенством использованной методики детектирования. Различия между сценариями с различными значениями r в каждом случае проявляются лишь при малых выборках: сценарии, когда $r = 0.2$ дают систематически большие ошибки, чем $r = 0.05$. По мере накопления данных ($N_{events} \gtrsim 10^4$) расхождения сглаживаются, и все кривые сходятся к почти нулевым значениям.

При $\kappa = 5$ пик давления P_{21} практически не виден из-за концентрации инициаторов вокруг выделенного направления. При увеличении количества событий в качестве P_{21} ошибочно детектировался пик P_{32} , что привело к небольшому росту ошибки. В дальнейшем мы планируем усовершенствовать алгоритм поиска локальных максимумов с помощью машинного обучения, что позволит существенно улучшить результаты.

Выводы

Проведённое исследование показало, что динамика возникновения микросейсмических событий в процессе закачки жидкости содержит устойчивые геометрические признаки, позволяющие восстанавливать параметры напряжённого состояния пласта. Полученные зависимости числа событий от порового давления демонстрируют наличие локальных максимумов, возникающих при касании окружностей Мора линией критерия Мора–Кулона. Эти особенности напрямую отражают структуру главных напряжений и позволяют извлечь информацию о параметрах тензора напряжений из формы кривой микросейсмической активности.

Статистическое моделирование с использованием ансамблей потенциальных плоскостей скольжения показало, что при умеренной анизотропии ориентаций ($\kappa \leq 1$) и при суммарном числе событий $N_{events} \gtrsim 10^4$ величины давлений касания P_{21} и P_{32} , промежуточное главное напряжение σ_2 и коэффициент Лодэ–Надаи r могут быть восстановлены с высокой точностью. Погрешности оценки P_{21} , P_{32} и σ_2 в этом случае не превышают порядка 0.1 МПа, а ошибка восстановления параметра r составляет величину порядка 10^{-3} . При высокой степени кластеризации ориентировок локальные максимумы становятся менее выраженными, что ограничивает возможности их надёжного выделения.

Используемая модель носит концептуальный и минималистичный характер. В ней предполагается линейный рост порового давления и не учитываются такие физические процессы, как диффузия давления, изменение прочностных свойств при деформации, асейсмическое скольжение и нелинейные законы трения. Эти упрощения введены намеренно, чтобы выделить фундаментальные геометрические закономерности, определяющие структуру кривых микросейсмической активности даже в предельно простой постановке. Результаты показывают, что сама геометрия диаграмм Мора формирует диагностические признаки, позволяющие по форме кривой микросейсмической активности судить о параметрах напряжённого состояния.

Дальнейшее развитие подхода предполагает учет процессов фильтрации и пороупругого перераспределения напряжений, что позволит изучить устойчивость максимумов P_{21} и P_{32} в реалистичных условиях. Перспективным направлением также является учёт неопределённостей фрикционных параметров μ и C , развитие вероятностных методов детектирования локальных максимумов, адаптация методики для обработки полевых данных с независимыми оценками напряжений и интеграция аналитических соотношений в более сложные модели индуцированной сейсмичности.

Таким образом, показано, что даже в минималистичной постановке структура микросейсмической активности содержит информативные признаки, позволяющие проводить первичную оценку напряжённого состояния пласта. Представленная концепция может быть расширена и адаптирована к реальным геолого-техническим условиям, сохраняя при этом простоту и вычислительную эффективность.

Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 125012100531–7).

Методика расчёта нормальных и касательных напряжений для ансамбля произвольно ориентированных трещин-инициаторов

В настоящем приложении приведено адаптированное для рассматриваемой задачи изложение процедур построения ансамбля трещин-инициаторов и расчёта напряжений на их плоскостях. В части генерации ориентировок нормалей используется стандартный алгоритм сэмплирования распределения Фишера/von Mises–Fisher на сфере [Wood, 1994], применяемый при задании ориентировок через нормали к плоскостям (*pole vectors*) в задачах анализа трещиноватости [Pakyuz-Charrier et al., 2018; Dubinya, Tikhotskiy, 2022].

Напряженное состояние среды определяется при помощи тензора напряжений σ . Для этого задаются величины главных компонент тензора, а также ориентация тензора в геодезической системе координат «восток – север – вверх». Ось x направлена на восток, y – на север, z – вверх, напряжения считаются положительными при сжатии. В системе главных осей тензор имеет диагональный вид:

$$\sigma^P = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее преобразование сводится к повороту этой матрицы в глобальное пространство посредством трёх углов Эйлера: (*trend*) φ – азимут проекции σ_x на горизонталь (отсчитывается по часовой стрелке от севера), (*plunge*) θ – угол её наклона вниз, и (*rake*) ψ – конечный разворот в плоскости, зафиксированной после первых двух вращений. Было условлено, что геологический азимут задаётся по часовой стрелке, при переходе к активной (право-ориентированной) системе вводится отрицательный знак: $\alpha = -\varphi$, а оставшиеся углы остаются без изменения $\beta = \theta$, $\gamma = \psi$. С этими углами составляются матрицы элементарных вращений:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Композиция $\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)$ реализует последовательность z – y – z -поворотов, обеспечивая однозначное соответствие между геометрическими углами и ориентацией главного напряжения. Итоговый тензор в глобальной системе вычисляется стандартным преобразованием:

$$\sigma = \mathbf{R}\sigma^P\mathbf{R}^T$$

или в компонентной форме $\sigma_{ij} = R_{ik} \sigma^{Pk} R_{jl}$.

Аналогичный подход используется при задании трещиноватости среды. Параметры сети трещин, служащих инициаторами микросейсмических событий, определяются, исходя из параметров «материнской» трещины. Для задания ориентации «материнской» трещины используется пара углов *strike* φ и *dip* δ . Угол *strike* определяется как азимут линии пересечения плоскости трещины с горизонталью, отсчитываемый по часовой стрелке от севера; угол *dip* задаётся как наклон плоскости вниз от горизонтали по кратчайшей линии падения.

Плоскость трещины описывается своей единичной нормалью \mathbf{n} , которая строится двухшаговым поворотом исходного вертикального вектора $\mathbf{n}_0 = [0, 0, -1]^T$ сначала выполняется вращение на угол

dip вокруг локальной оси y , затем – вращение на угол $(-\varphi)$ вокруг глобальной оси z . Для каждого шага вводятся элементарные матрицы поворота

$$R_y(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix}, \quad R_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после чего общая матрица поворота задаётся произведением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(-\varphi) \mathbf{R}_y(\delta),$$

что последовательно применяет *dip*-наклон, а затем *strike*-разворот. Единичная нормаль вычисляется как $\mathbf{n} = \mathbf{R} \mathbf{n}_0$.

В случае, если получившийся вектор направлен в верхнюю полуплоскость, он разворачивается на противоположный для соответствия с принятой в механике разломов ориентацией нормалей.

На основе параметров «материнской» трещины происходит построение ансамбля дочерних трещин. В локальной системе, где ось z совпадает с $-\mathbf{n}$, ориентации задаются сферическим распределением Фишера:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\kappa}{4\pi \sinh(\kappa)} \exp(\kappa \cos \theta),$$

где θ — полярный угол от среднего направления, φ – азимут, κ – параметр кучности, так что плотность вероятности углового отклонения θ определяется выражением:

$$f(\theta) = \frac{\kappa \sin \theta}{2 \sinh \kappa} \exp(\kappa \cos \theta) \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Кумулятивная функция для этого распределения:

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(u) du = \frac{e^\kappa - e^{\kappa \cos \theta}}{e^\kappa - e^{-\kappa}}.$$

Обратное преобразование метода Монте-Карло приводит к формуле:

$$\cos \theta = \frac{1}{\kappa} \ln(e^\kappa - u(e^\kappa - e^{-\kappa})),$$

где u равномерно распределено на $[0, 1]$. Азимутальное отклонение φ задаётся как равномерная величина на $[0, 2\pi)$. Принимая локальные координаты вектора нормали каждой трещины из ансамбля как:

$$\mathbf{n}_{loc} = [\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta]^\top,$$

глобальная нормаль каждой дочерней плоскости трещины получается операцией:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{R} \mathbf{n}_{loc,i}$$

с последующим отражением вверх-вниз по описанному ранее правилу.

Нормальное и касательное напряжения для каждой трещины из ансамбля вычисляется из заданного тензора напряжений σ и её единичной нормали \mathbf{n}_i следующим образом. Сначала определяется вектор полного напряжения $\mathbf{t}_i = \sigma \mathbf{n}_i$. После чего нормальное и касательное напряжения на плоскости определяются из соотношений:

$$\sigma_{n,i} = |\mathbf{n}_i^\top \mathbf{t}_i| = |\mathbf{n}_i^\top \sigma \mathbf{n}_i|, \quad \tau_i = \mathbf{t}_i - \sigma_{n,i} \mathbf{n}_i \quad \tau_i = |\tau_i|.$$

Об увеличении плотности точек на диаграмме Мора–Кулона при приближении к кругам Мора

В данном приложении приведён аналитический вывод, поясняющий распределение точек на диаграмме Мора. Вывод основан на общем правиле преобразования плотностей случайных величин и не претендует на самостоятельную научную новизну, а используется в настоящей работе применительно к задаче отображения ориентировок трещин в координаты диаграммы Мора.

Увеличение плотности точек на диаграмме Мора при приближении к кругам Мора объясняется особенностями преобразования координат при переходе от сферических углов к координатам напряжений. Рассмотрим объём среды, в котором находится множество случайно ориентированных плоскостей трещин. Пусть единичные векторы нормалей \mathbf{n} к этим плоскостям распределены равномерно по поверхности единичной сферы. Плотность такого распределения нормалей выражается как:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi}, \quad \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi],$$

где θ, φ – сферические координаты в главной системе напряжений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Тензор напряжений в главных осях имеет диагональный вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Для произвольной площадки с нормалью \mathbf{n} , заданной углами θ, φ , нормальное и касательное напряжения определяются как:

$$\sigma_n(\theta, \varphi) = \sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta,$$

$$\tau(\theta, \varphi) = \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_3^2 \cos^2 \theta - \sigma_n^2(\theta, \varphi)}.$$

Производные нормального напряжения по сферическим координатам:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - \sigma_3),$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varphi} = 2 \sin^2 \theta (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Производные касательного напряжения:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - \sigma_n \frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta}}{\tau},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_n \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varphi}}{\tau}.$$

Якобиан перехода от сферических координат к координатам диаграммы Мора:

$$J(\theta, \varphi) = \left| \frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varphi} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right|.$$

Абсолютная плотность точек $g(\sigma_n, \tau)$, возникающих при отображении равномерно распределённых нормалей на диаграмму Мора, с учётом закона преобразования плотности при дифференцируемом отображении, пропорциональна:

$$g(\sigma_n, \tau) \propto \frac{\sin \theta}{J(\theta, \varphi)}.$$

Таким образом, абсолютная плотность точек на диаграмме Мора, выраженная через сферические координаты, задаётся формулой:

$$g(\sigma_n, \tau) \propto \frac{\sin \theta}{\left| \frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varphi} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right|}.$$

Относительная плотность, нормированная на исходную сферическую плотность:

$$g_{\text{отн}}(\theta, \varphi) = \frac{\sin^2 \theta}{4\pi} \cdot \frac{1}{J(\theta, \varphi)}.$$

На диаграмме Мора границами допустимых значений (σ_n, τ) служат окружности Мора, соответствующие площадкам с нормальными, лежащими в плоскостях каких-то из двух главных напряжений. Одна или обе сферические координаты этих нормалей кратны $\pi/2$. Легко убедиться, что при стремлении какого-то из углов θ, φ к углу, кратному $\pi/2$ Якобиан преобразования $J(\theta, \varphi)$ стремится к 0, что приводит к росту как абсолютной, так и относительной плотности точек на диаграмме Мора. Например, нормали в плоскости (σ_1, σ_3) удовлетворяют $\theta = \pi/2$. При малом отклонении $\delta\theta$ от этих значений при фиксированном φ , значения σ_n и τ изменяются слабо, так как производные $\partial \sigma_n / \partial \theta, \partial \tau / \partial \theta$ малы. Это приводит к резкому уменьшению Якобиана $J(\theta, \varphi)$, а следовательно, увеличению плотности точек.

Список литературы

- Адушкин В.В., Турунтаев С.Б. Техногенная сейсмичность – индуцированная и триггерная. Москва : ИФЗ РАН. 2015. – 364 с.
- Angelier J. Determination of the mean principal directions of stresses for a given fault population // *Tectonophysics*. 1979. Vol. 56 (3–4). P. T17–T26. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0040-1951(79)90081-7)
- Angelier J. Inversion of field data in fault tectonics to obtain the regional stress – III. A new rapid direct inversion method by analytical means // *Geophysical Journal International*. 1990. Vol. 103 (2). P. 363–376. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1990.tb01777.x>
- Arnold R., Townend J.A Bayesian approach to estimating tectonic stress from seismological data // *Geophysical Journal International*. 2007. Vol. 170 (3). P. 1336–1356. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03485.x>
- Barton C.A., Zoback M.D. Stress perturbations associated with active faults penetrated by boreholes: Possible evidence for near-complete stress drop and a new technique for stress magnitude measurement // *Journal of Geophysical Research*. 1994. Vol. 99 (B5). P. 9373–9390. <https://doi.org/10.1029/93JB03359>
- Brudy M., Zoback M.D. Drilling-induced tensile wall-fractures: implications for the determination of in-situ stress orientation and magnitude // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 1999. Vol. 36 (2). P. 191–215. [https://doi.org/10.1016/S0148-9062\(98\)00182-X](https://doi.org/10.1016/S0148-9062(98)00182-X)
- Byerlee J. Friction of rocks // *Pure and Applied Geophysics*. 1978. Vol. 116 (4–5). P. 615–626. <https://doi.org/10.1007/BF00876528>
- Dubinya N.V., Tikhotskiy S.A. Method for the Inverse Problem Solution for Reconstruction of Stress-Strain State of Rock Mass Based on Natural Fractures Data // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2022. Vol. 58 (4). P. 544–561. <https://doi.org/10.1134/S1069351322040024>
- Dubinya N.V., Ziganshin E.R., Novikova E.V. Some Statistical Issues of Inverse Problem for Stress Inversion from Data on Natural Shear Fractures Conductivity // *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences*. 2025. https://doi.org/10.1007/978-3-031-88459-7_42

- Ellsworth W.L.* Injection-induced earthquakes // *Science*. 2013. Vol. 341 (6142). <https://doi.org/10.1126/science.1225942>
- Fisher R.* Dispersion on a sphere. *Proceedings of the Royal Society A*. 1953. Vol. 217 (1130). P. 295–305. <https://doi.org/10.1098/rspa.1953.0064>
- Funato A., Ito T.* A new method of diametrical core deformation analysis for in-situ stress measurements // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2017. Vol. 91. P. 112–118. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2016.11.002>
- Gephart J.W., Forsyth D.W.* An improved method for determining the regional stress tensor using earthquake focal mechanism data // *Journal of Geophysical Research*. 1984. Vol. 89 (B11). P. 9305–9320. <https://doi.org/10.1029/JB089iB11p09305>
- Haimson B.C., Cornet F.H.* ISRM suggested methods for rock stress estimation. Part 3: hydraulic fracturing (HF) and/or hydraulic testing of pre-existing fractures (HTPF) // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2003. Vol. 40 (7–8). P. 1011–1020. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2003.08.002>
- Ito T., Fujii R., Evans K.F., Hayashi K.* Estimation of Stress Profile with Depth from Analysis of Temperature and Fracture Orientation Logs in a 3.6 km Deep Well at Soultz: SPE/ISRM Rock Mechanics Conference. France. 2002. <https://doi.org/10.2118/78185-MS>
- Lacombe O.* Do fault slip data inversions actually yield «paleostresses»? // *Comptes Rendus Geoscience*. 2012. Vol. 344 (3–4). P. 159–173. <https://doi.org/10.1016/j.crte.2012.01.006>
- Lavrov A.* The Kaiser effect in rocks // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2003. Vol. 40 (2). P. 151–171. [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(02\)00138-7](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(02)00138-7)
- Lin W., Kwaśniewski M., Imamura T., Matsuki K.* Determination of three-dimensional in situ stresses // *Tectonophysics*. 2006. Vol. 426. P. 221–238. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2006.02.019>
- Ljunggren C., Chang Y., Janson T., Christiansson R.* An overview of rock stress measurement methods // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2003. Vol. 40 (7–8). P. 975–989. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2003.07.003>
- Maerten L., Maerten F., Lejri M., Gillespie P.* Geomechanical paleostress inversion using fracture data // *Journal of Structural Geology*. 2016. Vol. 89. P. 197–213. <https://doi.org/10.1016/j.jsg.2016.06.007>
- McClure M.W.* Modeling and characterization of hydraulic stimulation and induced seismicity in geothermal and shale gas reservoirs. Stanford. 2012.
- Michael A.J.* Determination of stress from slip data // *Journal of Geophysical Research*. 1984. Vol. 89 (B13). P. 11517–11526. <https://doi.org/10.1029/JB089iB13p11517>
- Moos D., Zoback M.D.* Utilization of well bore failure observations // *Journal of Geophysical Research*. 1990. Vol. 95 (B6). P. 9305–9325. <https://doi.org/10.1029/JB095iB06p09305>
- Matsuki K.* Anelastic strain recovery compliance of rocks // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2008. Vol. 45 (6). P. 952–965. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2007.10.005>
- Matsuki K., Takeuchi K.* Three-dimensional in situ stress determination // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics. Abstracts*. 1993. Vol. 30 (7). P. 1019–1022. [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(93\)90064-K](https://doi.org/10.1016/0148-9062(93)90064-K)
- Novikova E.V., Dubinya, N.V.* On Stability of Inverse Problem Solution. *Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences*. 2024. P. 99–113. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54589-4_11
- Pakyuz-Charrier, E., Lindsay M., Ogarko V., Giraud J., Jessell M.* Monte Carlo simulation for uncertainty estimation // *Solid Earth*. 2018. Vol. 9 (2). P. 385–402. <https://doi.org/10.5194/se-9-385-2018>
- Peška P., Zoback M.D.* Compressive and tensile failure of inclined well bores // *Journal of Geophysical Research*. 1995. Vol. 100 (B7). P. 12791–12811. <https://doi.org/10.1029/95JB00319>
- Plumb R.A., Hickman S.H.* Stress-induced borehole elongation // *Journal of Geophysical Research*. 1985. Vol. 90 (B7). P. 5513–5521. <https://doi.org/10.1029/JB090iB07p05513>
- Schmitt D.R., Currie C.A., Zhang L.* Crustal stress determination // *Tectonophysics*. 2012. Vol. 580. P. 1–26. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2012.08.029>
- Shapiro S.* Fluid-induced seismicity. Cambridge : Cambridge University Press. 2015. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139051132>
- Warpinski N.R., Teufel L.W.* A viscoelastic constitutive model // *SPE Production Engineering*. 1989. Vol. 4 (3). P. 272–280. <https://doi.org/10.2118/15368-PA>
- Wood A.T.A.* Simulation of the von Mises Fisher distribution // *Communications in Statistics*. 1994. Vol. 23 (1). P. 157–164. <https://doi.org/10.1080/03610919408813161>

Yamaji A. The multiple inverse method // *Journal of Structural Geology*. 2000. Vol. 22 (4). P. 441–452. [https://doi.org/10.1016/S0191-8141\(99\)00163-7](https://doi.org/10.1016/S0191-8141(99)00163-7)

Yamaji A., Sato K., Tonai S. Stochastic modeling for stress inversion // *Journal of Structural Geology*. 2010. Vol. 32 (8). P. 1137–1146. <https://doi.org/10.1016/j.jsg.2010.07.001>

Yamaji A., Sato K. Clustering of fracture orientations // *Journal of Structural Geology*. 2011. Vol. 33 (7). P. 1148–1157. <https://doi.org/10.1016/j.jsg.2011.05.006>

Zhang S., Ma X., Zoback M. Determination of crustal friction // *Rock Mechanics Bulletin*. 2023. Vol. 2 (1). P. 100024. <https://doi.org/10.1016/j.rockmb.2022.100024>

Ziganshin E.R., Dubinya N.V., Novikova E.V., Voronov I.A. Assessment of the In-situ Stress State // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2024. Vol. 24 (5). P. ES5006. <https://doi.org/10.2205/2024ES000955>

Zoback M.D. Reservoir geomechanics. Cambridge : Cambridge University Press. 2007. – 449 p.

Zoback M.D., Barton C.A., Brudy M., Castillo D.A., Finkbeiner T., Grollimund B.R., Moos D.B., Peška P., Ward C.D., Wiprut D.J. Determination of stress orientation and magnitude in deep wells // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2003. Vol. 40 (7–8). P. 1049–1076. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2003.07.001>

Zoback M.D., Moos D., Mastin L., Anderson R.N. Well bore breakouts and in situ stress // *Journal of Geophysical Research*. 1985. Vol. 90 (B7). P. 5523–5530. <https://doi.org/10.1029/JB090iB07p05523>

Zoback M.L. First- and second-order patterns of stress in the lithosphere // *Journal of Geophysical Research*. 1992. Vol. 97 (B8). P. 11703–11728. <https://doi.org/10.1029/92JB00132>

ASSESSMENT OF THE STRESS STATE OF A RESERVOIR BASED ON THE DYNAMICS OF MICROSEISMIC EVENT OCCURRENCE DURING FLUID INJECTION

© 2026 N. A. Baryshnikov^{1, *}, S. B. Turuntaev^{1, 2, **}

¹*Sadovsky Institute of Geospheres Dynamics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russia*

**E-mail: baryshnikov.na@idg.ras.ru*

***E-mail: stur@idg.ras.ru*

The study examines the possibility of estimating in-situ stress state parameters from the temporal evolution of microseismic events accompanying fluid injection into a porous reservoir. The approach is based on statistical modeling of microseismicity induced by pore pressure increase in a rock mass under frictional equilibrium. The relationship between the shape of event count versus pore pressure curves and the stress tensor parameters, as well as the characteristics of the orientation distribution of potential slip planes, is analyzed. It is shown that the evolution of microseismic activity is characterized by the presence of local maxima corresponding to tangency between Mohr circles and the Coulomb failure criterion, which makes it possible to relate their positions to the parameters of the stress state, in particular to the magnitude of the intermediate principal stress. It is established that under moderate anisotropy of slip plane orientations and a sufficient number of recorded events, the intermediate principal stress and the Lode–Nadai coefficient can be recovered with high accuracy. In contrast, at high anisotropy of orientations, the local maxima become poorly distinguishable, leading to a significant reduction in the informativeness of the microseismic activity curves. The obtained results demonstrate that the shape of microseismic activity curves can be used for a preliminary assessment of the stress state and horizontal stress magnitudes from microseismic monitoring data, as well as for evaluating the reliability of such estimates depending on the quality and volume of observations.

Keywords: microseismicity, fluid injection, pore pressure, reservoir stress state, stress tensor, intermediate principal stress, Lode–Nadai parameter, Coulomb criterion, Mohr diagram, statistical modeling, fracture orientation, induced seismicity.