

УДК 550.34.01

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ АФТЕРШОКОВ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

© 2025 г. О. Д. Зотов^{1,2,*}, А. В. Гульельми^{1,**}¹Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия²Геофизическая обсерватория «Борок» ИФЗ РАН, Борок, Россия

*E-mail: ozotov@inbox.ru

**E-mail: guglielmi@mail.ru

Элементарная теория афтершоков, будучи сравнительно простой математически, относится к основам физики землетрясений. В статье кратко изложены понятия и представления теории, приведены уравнения релаксации очага после главного удара, подчеркнута результативность теории при поиске новых подходов к обработке и анализу данных наблюдения афтершоков. Основное внимание уделено обсуждению двух новых результатов, полученных на базе элементарной теории. Во-первых, обнаружен двухстадийный режим релаксации очага. На первой стадии, названной эпохой Омори, строго выполняется закон Омори. Первая стадия оканчивается бифуркацией очага и начинается вторая стадия релаксации, на которой эволюция афтершоков протекает хаотично. Во-вторых, в рамках элементарной теории афтершоков введено концептуально новое понятие собственного времени очага. Оно оказалось эффективным при экспериментальном исследовании сейсмической активности.

Ключевые слова: очаг землетрясения, коэффициент деактивации, закон Омори, динамическая система, релаксация, собственное время.

Для цитирования: Зотов О.Д., Гульельми А.В. Об элементарной теории афтершоков землетрясения // Динамические процессы в геосферах. 2025. Т. 17. № 3 С. 58–68 https://doi.org/10.26006/29490995_2025_17_3_58

Введение

Вслед за главным ударом тектонического землетрясения наблюдается череда афтершоков, частота которых $n(t)$ убывает со временем. Обширная литература по экспериментальному и теоретическому исследованию афтершоков достаточно полно отражена во многих монографиях и обзорах, например, [Болт, 1981; Касахара, 1985; Utsu et al., 1995; Гульельми, 2015; 2017]. Именно для афтершоков еще в позапрошлом веке был установлен первый закон физики землетрясений, так называемый закон Омори, согласно которому средняя частота $n(t)$ гиперболически убывает с течением времени [Omori, 1894]. Здесь уместно указать на многочисленные работы [Hirano, 1924; Jeffreys, 1938; Utsu, 1961; 1962; Ogata, 1988; Kisslinger, 1996; Ogata, Zhuang, 2006; Faraoni, 2020; Rodrigo, 2021; Salinas-Martínez et al., 2023], посвященные закону Омори. Установлен также закон Бата, согласно которому разность между магнитудой главного удара и максимальной магнитудой афтершоков превышает 1.2 [Bath, 1965; Lombardi, 2002].

Законы Омори, Бата, а также другие интересные свойства афтершоков были установлены эмпирически без опоры на теорию. Поиск путей для создания теории землетрясений ведется геофизиками в различных направлениях, одно из которых представлено в серии публикаций А. Д. Завьялова, Б. И. Клайна и авторов данной статьи [Гульельми, 2016; Zotov et al., 2020; Завьялов и др., 2020; 2022; Guglielmi, Zotov, 2022; 2024; Guglielmi et al., 2024; 2025]. Мы исходим из идеализированного представления об очаге как о динамической системе и строим дедуктивно теорию релаксации очага, «остывающего» после главного удара. Основным параметром теории является так называемый коэффициент деактивации очага $\sigma(t)$, который можно вычислить по данным наблюдения частоты афтершоков $n(t)$.

Мы называем нашу теорию элементарной не только потому, что она относится к основам физики землетрясений, но также и потому, что в математическом отношении теория находится на самом простом, начальном уровне развития. Зависимость между временем и состоянием системы задается аксиоматически. Уравнение, описывающее эволюцию афтершоков, выводится, причем и это весьма существенно, на вид функции $\sigma(t)$ не накладывается никаких ограничений, кроме требования непрерывности и гладкости. Синоптический обзор элементарной теории мы дадим в следующем разделе статьи.

Вместе с тем, несмотря на простоту, элементарная теория оказалась эффективной при поиске новых подходов к обработке и анализу афтершоков. Из многообразия результатов, полученных на базе элементарной теории, мы выделим и подробно обсудим двухстадийный режим релаксации очага и концептуально новое представление о собственном времени очага.

Предложенная теория является феноменологической. Во-первых, это значит, что коэффициент деактивации и другие феноменологические параметры не истолковываются в общезначимых понятиях и представлениях, а вычисляются на основе экспериментальных данных. Во-вторых, при построении теории мы использовали методологические приемы трансцендентальной феноменологии, а именно, редукцию и эпохэ, или, если говорить упрощенно, сведение сложного к простому и воздержание от априорных суждений о характере релаксации очага. В частности, и это важно подчеркнуть, мы отказались, в отличие от Омори, Хирано и Утсу, от подбора подгоночной формулы для аппроксимации затухания активности афтершоков с течением времени.

Элементарная теория

В основу элементарной теории афтершоков положено представление об очаге землетрясения как о динамической системе, состояние которой характеризуется параметром $\sigma(t)$, названным нами коэффициентом деактивации очага. Формально величина коэффициента деактивации равна

$$\sigma = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}, \quad (1)$$

где $n(t)$ – частота афтершоков, в среднем убывающая с течением времени. На фазовой плоскости (σ, Θ) , где $\Theta = d\sigma/dt$, изображающая точка $[\sigma(t), \Theta(t)]$ перемещается по некоторой фазовой траектории, которая графически представляет процесс релаксации очага после главного удара. Если $\sigma = \text{const}$, то фазовая траектория вырождается в неподвижную точку $(\sigma, 0)$. В расширенном фазовом пространстве (σ, Θ, t) вырожденная фазовая траектория имеет вид прямой линии, параллельной оси t . Вырождение наступает тогда и только тогда, когда строго выполняется закон Омори [Omori, 1894] (подробнее см. в [Guglielmi et al., 2024]).

Введем вспомогательную функцию $g(t) = 1/n(t)$. При использовании новой зависимой переменной $g(t)$ уравнение эволюции афтершоков имеет вид простейшего линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dg}{dt} = \sigma(t). \quad (2)$$

Оно эквивалентно простейшему нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dn}{dt} + \sigma n^2 = 0. \quad (3)$$

Хотя формально оба уравнения эволюции эквивалентны друг другу, однако в приложениях теории к обработке экспериментальных данных и при поиске обобщений элементарной теории бывает удобнее использовать либо (2), либо (3).

Обратная задача очага состоит в том, чтобы вычислить коэффициент деактивации по данным наблюдения частоты афтершоков. Корректное решение, пригодное для вычисления $\sigma(t)$ по данным реального наблюдения $n(t)$ имеет вид

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} \langle g(t) \rangle, \quad (4)$$

где угловые скобки обозначают оптимальное сглаживание вспомогательной величины $g(t)$ [Гульельми, 2017]. В данном случае мы использовали сплайн-аппроксимацию $g(t)$ при условии, что дисперсия $\langle g(t) \rangle$ примерно на порядок меньше дисперсии $g(t)$.

Элементарная теория открывает новые возможности для обработки и анализа афтершоков и дает основу для поиска обобщений, учитывающих те или иные стороны динамики очага после главного удара. Простейшее обобщение состоит в добавлении свободного члена в правую часть уравнения эволюции (3). Неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dn}{dt} + \sigma n^2 = f(t) \quad (5)$$

формально имитирует воздействие триггера на очаг. Например, $f(t) \propto \sigma(t - \Delta t)$ для кругосветного сейсмического эха, которое является эндогенным триггером, возбужденным во время главного удара землетрясения. Здесь $\Delta t \sim 3$ ч – время задержки эха [Завьялов и др., 2020].

Если $f(t)$ – случайная функция, то уравнение (5) становится стохастическим дифференциальным уравнением. Его уместно использовать для учета влияния сейсмических шумов в очаге на поток афтершоков.

Добавив линейный член в уравнении (3), мы получим логистическое уравнение Ферхюльста

$$\frac{dn}{dt} = n(\gamma - \sigma n), \quad (6)$$

где γ – второй феноменологический параметр очага. С течением времени частота афтершоков асимптотически стремится к частоте подземных толчков в фоновом режиме сейсмичности $n_\infty = \gamma/\sigma$. По n_∞ , при известной величине σ , можно оценить γ .

Необходимость радикального обобщения возникла при постановке и решении задачи об экспериментальном исследовании пространственно-временной эволюции очага [Zotov et al., 2020]. Было предложено перейти от обыкновенного дифференциального уравнения эволюции (3) к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial n}{\partial t} = n(\gamma - \sigma n) + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (7)$$

известному как уравнение Колмогорова, Петровского и Пискунова (сокращенно КПП) [Колмогоров и др., 1937]. Выбор уравнения КПП мотивирован тем, что его решения содержат стационарные волны диффузии, распространяющиеся со скоростью $V \sim \sqrt{D\gamma}$. Это свойство уравнения КПП дает возможность гипотетически интерпретировать явление распространения афтершоков со скоростью несколько километров в час, обнаруженное в эксперименте, как распространение волн нелинейной диффузии [Zotov et al., 2020].

Обсуждение

Режим релаксации очага

Закон Омори в рамках элементарной теории имеет вид $\sigma = \text{const}$ (см. также [Hirano, 1924; Utsu, 1961; 1962]). Между тем наш опыт решения обратной задачи очага свидетельствует о том, что

коэффициент деактивации испытывает значительные изменения при релаксации очага. Тщательный анализ динамики коэффициента деактивации, а также фазовых траекторий очага дал возможность обнаружить двухстадийный режим эволюции афтершоков.

На первой стадии строго выполняется закон Омори $\sigma = \text{const}$. Продолжительность первой стадии изменяется от случая к случаю, от нескольких дней до нескольких месяцев. Отмечена тенденция к увеличению продолжительности с ростом магнитуды главного удара. Величина коэффициента деактивации уменьшается с ростом магнитуды главного удара. Первая стадия эволюции была названа эпохой Омори. В эпоху Омори средняя частота афтершоков вполне предсказуема.

Эпоха Омори заканчивается бифуркацией, после которой коэффициент деактивации изменяется со временем довольно хаотично. На второй стадии эволюция афтершоков непредсказуема. Рис. 2 иллюстрирует двухстадийный режим эволюции. Продолжительность эпохи Омори составляет около 100 дней в случае, представленном на рисунках 1 и 2 [Guglielmi et al., 2024].

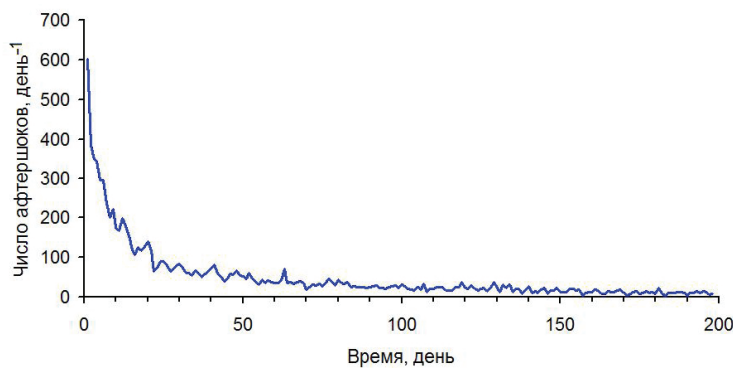


Рис. 1. Зависимость частоты афтершоков от времени. Главный удар землетрясения с $M = 6.7$ и глубиной гипоцентра 18 км произошел в Южной Калифорнии 17.01.1994 г. За 200 дней произошло 9867 афтершоков

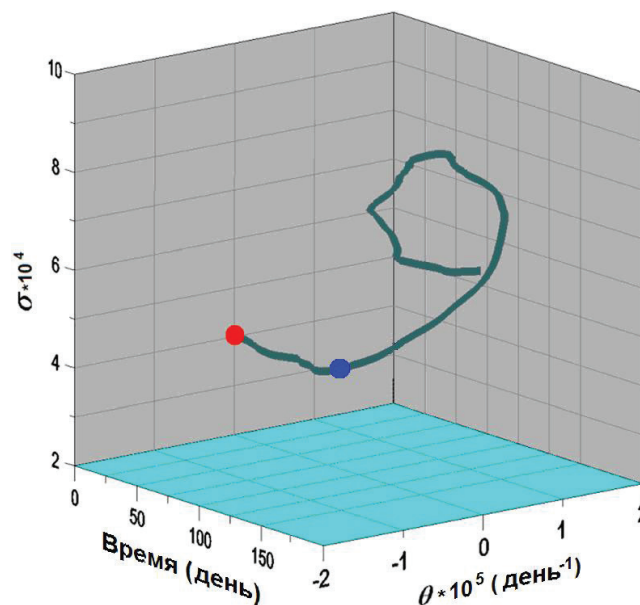


Рис. 2. Фазовая траектория эволюции афтершоков в расширенном фазовом пространстве. По данным, представленным на рис. 1. Красная и синяя точки отмечают начало и окончание эпохи Омори

В литературе нередко утверждается, что для описания афтершоков следует использовать не закон Омори, а закон Утсу (см., например, [Salinas-Martínez et al., 2023]). Но представление о двухстадийном режиме релаксации очага исключает применимость этого закона. Вместе с тем, в реальности гиперболический закон Омори действует, но его применимость ограничена первой стадией эволюции очага.

Собственное время очага

Замена переменных является эффективным методом исследования динамических систем. Путем замены зависимой переменной мы получили уравнение эволюции очага в виде простейшего дифференциального уравнения (2). Теперь же сделаем замену независимой переменной $t \rightarrow \tau$, где

$$\tau = \int_0^t \sigma(t') dt' \quad (8)$$

и будем условно называть τ собственным временем очага. В результате такой замены нелинейное уравнение эволюции (3) приобретает компактный вид

$$\frac{dn}{d\tau} + n^2 = 0. \quad (9)$$

Его общее решение равно

$$n(\tau) = \frac{n_0}{1 + n_0 \tau}, \quad (10)$$

где $n_0 = n(0)$ – начальное условие. Мы видим, что частота афтершоков гиперболически убывает с течением собственного времени. Свойство гиперболичности присуще также классическому закону Омори [Omori, 1984]. Различие касается лишь выбора независимой переменной. Омори использовал мировое время. В формуле (9) использовано собственное время очага, которое, вообще говоря, течет неравномерно (см. (8)).

Неравномерность течения собственного времени объясняется следующим образом. Очаг как динамическая система неустойчив. Горные породы, слагающие очаг, находятся в нестационарном состоянии. В результате коэффициент деактивации, обобщенно характеризующий функционирование очага, зависит от времени. По определению (8) собственное время очага протекает неравномерно.

Представление собственного времени очага в виде непрерывной функции мирового времени $\tau(t)$ является далеко идущей идеализацией. В основе представления лежит богатейший опыт наблюдения дискретной последовательности афтершоков. Процедура формирования функции $\tau(t)$ начинается с разбиения череды афтершоков на сравнительно малые отрезки времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ одинаковой продолжительности, каждый из которых содержит достаточно большое количество афтершоков для того, чтобы можно было вычислить «мгновенную» частоту $n(t_i)$, отнесенную, например, к середине каждого отрезка.

Здесь мы не можем останавливаться на методологически непростых вопросах, связанных с выбором величины Δt . Отметим только, что в каждом интервале Δt события имеют Пуассоновское распределение, причем последовательность средних времен ожидания очередного афтершока T_i образует арифметическую прогрессию в эпоху Омори. Общий член прогрессии равен

$$T_i = T_1 + (i-1)\delta T, \quad (11)$$

где $\delta T = \sigma \Delta t$ – шаг прогрессии. Иначе говоря, в каждый момент t_i время ожидания равно времени ожидания в предыдущий момент t_{i-1} , увеличенному на одно и то же число: $T_i = T_{i-1} + \delta T$, $i \geq 2$. Последовательность T_i является монотонно возрастающей при $\sigma > 0$.

Далее, мы наносим все точки на координатную плоскость (i, T_i) , аппроксимируем их гладкой функцией $g(t)$, по которой вычисляем коэффициент деактивации $\sigma(t)$ и собственное время очага $\tau(t)$. Таким образом, идеализация заключается в переходе от конечного множества чисел к непрерывной гладкой функции. Радикальность перехода состоит в замене реально наблюдаемого нами счетного множества множеством мощности континуума.

Наша идеализация оказалась успешной. Она дала возможность сформулировать элементарную теорию афтершоков, которая позволила по-новому подойти к анализу афтершоков и обнаружить ряд неизвестных ранее свойств очага землетрясения. Однако новая методология напрямую применима только к обработке и анализу афтершоков. Между тем, было бы интересно попытаться найти возможность ввести общее представление о собственном времени очага, отличном от мирового времени, применимое как к афтершокам, так и к форшокам и главным ударам. Такая попытка предпринята в работах [Guglielmi, Zotov, 2022; 2024]. Конструкция «подземных часов» была изменена следующим образом.

При изучении глобальной активности сильных землетрясений в качестве основной единицы собственного времени выбран интервал между двумя следующими друг за другом относительно более слабыми землетрясениями [Guglielmi, Zotov, 2022]. Другими словами, отсчет собственного времени велся самым примитивным образом по подземным толчкам сравнительно малой магнитуды. Более успешной оказалась идея изучать эволюцию форшоков и афтершоков, используя сами форшоки и афтершоки как метки собственного времени очага [Guglielmi, Zotov, 2024].

Рассмотрим вопрос подробнее. Для возможности оценить результат перехода на новый способ хронометрии рассмотрим последовательность афтершоков. Пронумеруем афтершоки натуральными числами $N = 1, 2, 3, \dots$ в порядке их появления. Будем называть N дискретным собственным временем очага. Для каждого N определим мировое время t_N появления соответствующего афтершока. Нанесем точки (N, t_N) на координатную плоскость (C, t) . Здесь символ C (*chronos*) обозначает непрерывное собственное время очага. Теперь аппроксимируем конечное множество точек (N, t_N) достаточно гладкой непрерывной функцией $t(C)$ и введем вспомогательную функцию

$$\bar{g} = \frac{dt}{dC}. \quad (12)$$

Коэффициент деактивации, вычисленный по указанной выше методике, равен

$$\bar{\sigma} = \frac{d}{dC} \ln \langle \bar{g} \rangle. \quad (13)$$

Напомним, что формулы (1) и (8), а также вспомогательная функция $g(t) = 1/n(t)$ были выбраны таким образом, чтобы при $\sigma = \text{const}$ классический закон Омори строго выполнялся при упорядочивании событий по мировому времени. Если наши подземные часы работают исправно, то мы вправе ожидать, что $\bar{g}(C)$ – линейная функция, а $\bar{n}(C)$ – гиперболическая функция t , причем

$$C(t) \propto \ln t, \quad (14)$$

и

$$\bar{\sigma} = \sigma \quad (15)$$

при $\sigma = \text{const}$. Указанные свойства $\bar{g}$, $\bar{n}$, C и $\bar{\sigma}$ мы можем использовать как критерии рациональности нашего необычного выбора конструкции часов, отсчитывающих собственное время очага. Только опыт применения новой хронометрии при исследовании землетрясений покажет, насколько она результативна в том отношении, что позволяет обнаруживать неизвестные ранее свойства сейсмичности. В данном исследовании мы ограничимся тем, что на одном конкретном примере используем (14) и (15) как тесты для проверки хода подземных часов.

Рассмотрим событие, фазовая траектория которого изображена на рис. 2. Оно удобно тем, что эпоха Омори продолжалась долго, около трех месяцев. Коэффициент деактивации в эпоху Омори был тщательно измерен и оказался равным $\sigma = 0.0004$. Мы хотим сравнить σ с величиной $\bar{\sigma}$, измеренной по собственному времени очага.

Напомним, что за 200 дней после главного удара было зарегистрировано 9867 афтершоков. Каждый афтершок получил свой порядковый номер N . Для удобства графического представления мы разделили афтершоки на последовательные кластеры по 100 афтершоков в каждом и определили время появления 51-го афтершока в каждом кластере. Наконец, найденные таким образом точки мы нанесли на координатную плоскость (C, t) так, как это показано на рис. 3. Рис. 3 отчетливо и убедительно демонстрирует, что на протяжении почти всей эволюции очага, а точнее, в течение 195 дней из 200, дискретная последовательность точек принадлежит графику типа $\ln t \propto C$. Следовательно, критерий (14) выполняется с точностью, которую можно требовать от экспериментов такого рода.

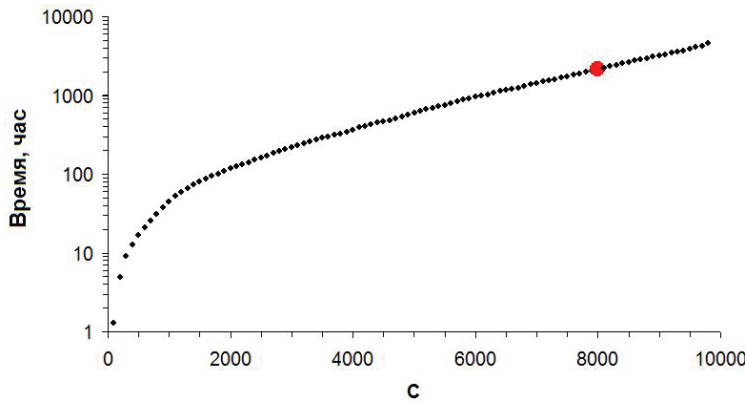


Рис. 3. Зависимость мирового времени появления афтершоков от собственного времени очага землетрясения. Красная точка показывает момент окончания эпохи Омори

Для тестирования наших подземных часов по формулам (13), (15) мы аппроксимируем экспериментальные точки, начиная с $N = 1501$ и заканчивая $N = 9867$, непрерывной гладкой функцией

$$t(C) = a \exp[b(C-1)]. \quad (16)$$

Вычисления дают $a = 55.3$, $b = 0.0005$ при весьма высоком коэффициенте детерминации $R^2 = 0.99$. По формулам (12), (13) находим $\bar{\sigma} = 0.0005$, что всего лишь на 20% отличается от σ . Мы считаем, что указанному отличию не следует придавать большого значения. Ведь $\bar{\sigma}$ и σ вычислялись по двум существенно различным методикам. Могло сказаться и то обстоятельство, что σ вычислялась по данным об афтершоках в эпоху Омори, в то время как для вычисления $\bar{\sigma}$ мы использовали в два раза более продолжительный интервал эволюции очага. Тем не менее, мы произведем еще одну независимую проверку.

Интервал мирового времени между смежными афтершоками равен $T_N = T_{N+1} - t_N$. Среднее время ожидания очередного афтершока представлено на рис. 4 прямой линией

$$T(C) = 3.9 \exp[0.0004(C-1)]. \quad (17)$$

Коэффициент детерминации равен 0.98. Отсюда прямо следует, что $\bar{\sigma} = 0.0004$.

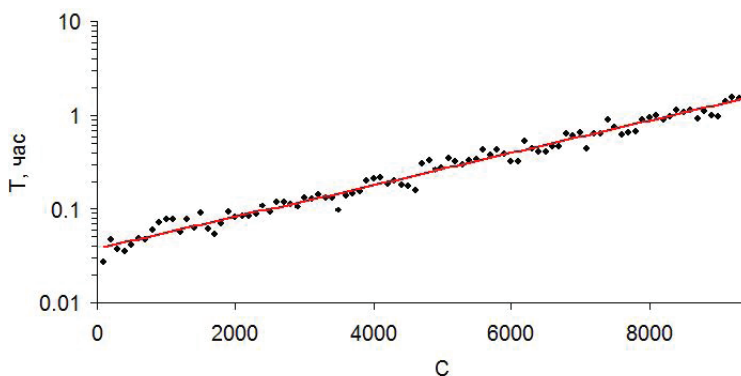


Рис. 4. Среднее время ожидания очередного афтершока. Прямая линия аппроксимирует точки. Каждая точка указывает на среднее время ожидания, вычисленное по 100 афтершокам, следующим друг за другом

Полному совпадению $\bar{\sigma} = \sigma$ мы также не будем придавать особого значения. Во всем этом деле основной вопрос состоит в том, насколько полезен отсчет собственного времени по нашим подземным часам для обнаружения новых свойств землетрясений. Пока что мы можем указать один нетривиальный результат использования методики, описание и обоснование которой дано выше. Речь идет о конвергенции форшоков и дивергенции афтершоков, обнаруженных при статистическом анализе глобальной сейсмичности [Guglielmi, Zotov, 2024].

Завершая обсуждение, уместно привести уравнение для частоты афтершоков $\bar{n}(C)$ при упорядочивании их по собственному времени очага:

$$\frac{d\bar{n}}{dC} + \bar{\sigma}\bar{n} = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения имеет вид

$$\bar{n}(C) = \bar{n}_1 \exp[-\bar{\sigma}(C-1)] \quad (19)$$

при $\bar{\sigma} = \text{const}$ и

$$\bar{n}(C) = \bar{n}_1 \exp\left[-\int_1^C \bar{\sigma}(C') dC'\right] \quad (20)$$

в общем случае. Мы обнаружили, что эволюция афтершоков описывается линейным дифференциальным уравнением. Частота афтершоков уменьшается с течением собственного времени экспоненциально. Отметим, что эволюция очага по мировому времени протекает совершенно иначе: уравнение эволюции (3) нелинейно, а затухание афтершоков происходит по гиперболическому закону Омори.

Заключение

Идея построения элементарной теории возникла при попытке осмыслить с позиций трансцендентальной феноменологии динамику очага землетрясения после образования в нем магистрального разрыва сплошности горных пород. Феноменологическая редукция, т.е. переход от фактов к сущности, состояла в радикальном переходе от естественного взгляда на очаг как на сложно устроенную и сложно функционирующую структуру к простой идеализированной динамической системе.

Понятие деактивации очага является центральным в элементарной теории. При выборе способа вычисления коэффициента деактивации по данным о частоте афтершоков мы сознательно использовали эпоху, воздержавшись от каких бы то ни было предварительных суждений о зависимости коэффициента деактивации от времени. В результате удалось обнаружить двухстадийный режим релаксации очага и установить, что закон Омори выполняется строго, но только на первой стадии эволюции.

В рамках элементарной теории возникло представление о собственном времени очага землетрясения, вообще говоря, отличном от мирового времени. Мы предложили оригинальный способ отсчета собственного времени, причем оно логарифмически зависит от мирового времени в эпоху Омори. На конкретном примере показано, что активность афтершоков экспоненциально уменьшается с течением собственного времени очага.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания Института физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН.

Благодарности

Выражаем искреннюю благодарность А. Д. Завьялову и Б. И. Клайну за плодотворные дискуссии и поддержку. Мы благодарны составителям каталога Южно-Калифорнийского Центра Землетрясений (SCEC) (<https://scedc.caltech.edu>), данные из которого были использованы в нашем исследовании.

Список литературы

- Болт Б.А. Землетрясения. Общеизвестный очерк. М. : Мир. 1981. – 256 с.
- Гульельми А.В. Форшоки и афтершоки сильных землетрясений в свете теории катастроф // УФН. 2015. Т. 185. № 4. С. 415–429. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0185.201504f.0415>
- Гульельми А.В. Интерпретация закона Омори // Физика Земли. 2016. № 5. С. 165–166. <https://doi.org/10.7868/S0002333716050161>
- Гульельми А.В. Закон Омори (из истории геофизики) // УФН. 2017. Т. 187. № 3. С. 343–348. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038039>
- Завьялов А.Д., Гульельми А.В., Зотов О.Д. Три проблемы физики афтершоков // Вулканология и сейсмология. 2020. № 5. С. 67–80. <https://doi.org/10.31857/S0203030620050077>
- Касахара К. Механика землетрясений. М. : Мир. 1985. – 264 с.
- Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
- Bath M. Lateral inhomogeneities in the upper mantle // Tectonophysics. 1965. Vol. 2. P. 483–514. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(65\)90003-X](https://doi.org/10.1016/0040-1951(65)90003-X)
- Faraoni V. Lagrangian formulation of Omori's law and analogy with the cosmic Big Rip // Eur. Phys. J. C. 2020. Vol. 80 : 445. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8019-2>
- Guglielmi A.V., Zotov O.D. About the waiting time for a strong earthquake. Cornell University Library: arXiv:2209.00176. [physics.geo-ph]. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.00176>
- Guglielmi A.V., Zotov O.D. Energy flows in the earthquake source before and after the main shock. Cornell University Library: arXiv:2401.13063. [physics.geo-ph]. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.13063>
- Guglielmi A., Zavyalov A., Zotov O., Klain B. The Omori Epoch: On the 100th Anniversary of the Death of a Famous Japanese Seismologist // Pure Appl. Geophys. 2024. Vol. 181. P. 2741–2752. <https://doi.org/10.1007/s00024-024-03560-7>
- Guglielmi A.V., Zavyalov A.D., Zotov O.D., Klain B.I. A method for processing and analysis of aftershocks due to a tectonic earthquake: A new look at an old problem // J. Volcanology and Seismology. 2025. Vol. 19 (2). P. 196–202. <https://doi.org/10.1134/S0742046325700022>
- Hirano R. Investigation of aftershocks of the Great Kanto earthquake at Kumagaya // Kishoshushi. Ser. 2. 1924. Vol. 2. P. 77–83.
- Jeffreys H. Aftershocks and periodicity in earthquakes // Gerlands Beitr. Geophys. 1938. Vol. 56. P. 111–139.
- Kisslinger C. Aftershocks and fault-zone properties // Adv. Geophys. 1996. Vol. 38. P. 1–36. [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60019-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60019-9)
- Lombardi A.M. Probability interpretation of Bath's law // Ann. Geophys. 2002. Vol. 45. P. 455–472. <https://doi.org/10.4401/ag-3520>
- Ogata Y. Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes // J. American Statistical Association. 1988. Vol. 83 (401). P. 9–27. <https://doi.org/10.2307/2288914>
- Ogata Y., Zhuang J. Space-time ETAS models and an improved extension // Tectonophysics. 2006. Vol. 413 (1–2). P. 13–23. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2005.10.016>
- Omori F. On the aftershocks of earthquake // J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo. 1894. Vol. 7. P. 111–200.
- Rodrigo M.R. A spatio-temporal analogue of the Omori-Utsu law of aftershock sequences // Cornell University Library: arXiv:2111.02955v1 [physics.geo-ph]. 2021. P. 1–12. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.02955>
- Salinas-Martínez A., Perez-Oregon J., Aguilar-Molina A.M., Muñoz-Diosdado A., Angulo-Brown F. On the possibility of reproducing Utsu's Law for earthquakes with a spring-block SOC model // Entropy. 2023. Vol. 25. P. 816. <https://doi.org/10.3390/e25050816>
- Utsu T. A statistical study on the occurrence of aftershocks // Geophys. Mag. 1961. Vol. 30. P. 521–605.
- Utsu T. On the nature of three Alaskan aftershock sequences of 1957 and 1958 // Bull. Seismol. Soc. Am. 1962. Vol. 52. P. 279–297. <https://doi.org/10.1785/BSSA0520020279>

Utsu T., Ogata Y., Matsu'ura R.S. The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity // J. Phys. Earth. 1995. Vol. 43 (1). P. 1–33. <http://dx.doi.org/10.4294/jpe1952.43.1>

Zavyalov A., Zotov O., Guglielmi A., Klain B. On the Omori Law in the physics of earthquakes // Appl. Sci. 2022. Vol. 12 (19). P. 9965. <https://doi.org/10.3390/app12199965>

Zotov O.D., Zavyalov A.D., Klain B.I. On the spatial-temporal structure of aftershock sequences. In: Yanovskaya T. et al. (eds). Problems of Geocosmos–2018. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer. Cham. 2020. P. 199. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21788-4_16

ON THE ELEMENTARY THEORY OF EARTHQUAKE AFTERSHOCKS

O. D. Zotov^{1, 2, *}, A. V. Guglielmi^{1, **}

¹*Schmidt Institute of Physics of the Earth Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Borok Geophysical Observatory of Institute of Physics of the Earth Russian Academy of Sciences, Borok, Russia*

**E-mail: ozotov@inbox.ru*

***E-mail: guglielmi@mail.ru*

The elementary theory of aftershocks, being relatively simple mathematically, belongs to the basics of earthquake physics. The paper briefly outlines the concepts and ideas of the theory, provides equations for the relaxation of the source after the main shock, and emphasizes the effectiveness of the theory in the search for new approaches to the processing and analysis of aftershock observation data. The main attention is paid to the discussion of two new results obtained on the basis of elementary theory. Firstly, a two-stage relaxation mode of the earthquake source was discovered. In the first stage, called the Omori epoch, the Omori law is strictly observed. The first stage ends with a bifurcation of the source, and the second stage of relaxation begins, during which the evolution of aftershocks proceeds chaotically. Secondly, within the framework of the elementary theory of aftershocks, a fundamentally new concept of the proper time of the source was introduced. The source proper time has proven useful in experimental studies of seismic activity.

Keywords: earthquake source, deactivation coefficient, Omori law, dynamic system, relaxation, proper time.