

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СКАЧКА ПЛОТНОСТИ НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ВНЕШНИМ И ВНУТРЕННИМ ЯДРОМ

Д.Н. Краснощекоев, В.М. Овчинников

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики геосфер Российской академии наук

В статье приведены результаты оценки скачка плотности на границе внутреннего ядра Земли различными методами по двум группам измерений на эпицентральных расстояниях от 11 до 24 градусов. Сравнение полученных оценок скачка плотности с модельными кривыми показывает, что расширение набора данных за счёт использования амплитуды шума на интервале ожидаемого вступления PKiKP, даёт заметное снижение результирующих оценок. Показано, что оценки, полученные методом максимального правдоподобия, дают величину скачка плотности в диапазоне 0.3–0.6 г/см³. В то время как оценка только по средним значениям обнаруженных волновых форм PKiKP и PcP даёт значения порядка 0.6–0.9 г/см³.

Введение

Считается, что зона перехода от внешнего к внутреннему ядру относится к наиболее динамически активной области земного ядра в связи с его продолжающимся ростом [Tkalčić 2015]. Одним из вопросов, который представляет интерес не только с точки зрения общего строения Земли и распределения механических параметров в ней, является скачок плотности на границе внутри ядра и характер перехода – со скачком скорости или градиентным изменением [Бурмин, 2006]. От решения этих задач зависит оценка величины высвобождаемой гравитационной энергии, что является важным фактором в проблеме генерации и эволюции магнитного поля Земли [Gubbins et al., 1979]. Имеющиеся в настоящее время оценки скачка плотности получены двумя методами. Первый метод основывается на инверсии спектра длиннопериодной записи собственных колебаний Земли и позволяет оценить разницу в плотности вещества, слагающего внутреннее и внешнее ядро. Ранние работы по собственным колебаниям Земли приводят значения скачка плотности около 0.4–0.6 г/см³, которые включены в стандартные модели Земли [Dziewonski & Anderson, 1981]. Более поздние публикации приводят большие величины – до 0.8–0.9 г/см³ [Masters & Gubbins 2003]. Второй метод использует

отношение амплитуд объемных волн, отражённых от внутренней и внешней границ жидкого ядра (соответственно PKiKP и PcP) и зарегистрированных на эпицентральных расстояниях докритического отражения. Измеренные амплитудные отношения PKiKP/PcP и соответствующие им оценки скачка плотности варьируют в широком диапазоне, ограниченном сверху величиной 1.8 г/см^3 [Адушкин и др., 1997; Bolt & Qamar 1970].

Существенным недостатком имеющихся оценок скачка плотности по отношению амплитуд объемных волн PKiKP/PcP является слабая представительность данных на малых эпицентральных расстояниях (т.е. при почти вертикальном падении волн на отражающую границу), где отношение амплитуд наиболее чувствительно к изменению скачка плотности. Другой аспект возможного систематического смещения при оценке скачка – статистическая обработка экспериментального материала. В большей части опубликованных работ неявно предполагается нормальный закон распределения отношения амплитуд, хотя в некоторых исследованиях привлекается логарифм отношения [Koper & Pyle, 2004]. Необходимость использования логарифма может быть продиктована тем фактом, что при распространении в случайно-неоднородной среде с размером неоднородностей больше длины волны основной эффект выражается в виде флуктуации амплитуды и фазы сейсмической волны. Этот вопрос особенно актуален для амплитудных отношений, в которых вместо одной из измеренных амплитуд (PcP или PKiKP) присутствует её оценка сверху на основе сейсмического шума.

В настоящей работе используется метод максимума правдоподобия, учитывающий специфику функции распределения амплитуд и дающий возможность для использования «негативной информации» (термин «негативная информация» означает замену данных об амплитуде волны PKiKP амплитудой шума на временном интервале ожидаемого вступления волны PKiKP). Работа ставит своей целью выяснить сколь велико влияние на оценку скачка плотности групп данных, включающих только измерения обнаруженных волновых форм, и данных с «негативной информацией», как, например, это делается при оценке магнитуды максимума правдоподобия в системе наблюдений с фиксированным числом сейсмических станций [Ringdal, 1975].

Метод оценки

Трудность обнаружения волновых форм PKiKP и PcP на малых эпицентральных расстояниях [Адушкин и др., 1997] в значительной степени определяет свойства экспериментальных наборов данных, используемых для оценки скачка плотности по амплитудному отношению PKiKP/PcP. Эти экспериментальные данные часто представляют собой две группы [Shearer & Masters, 1990; Tkalčić et al., 2010]: одна из групп включает измерения отношения амплитуд $A_{\text{PKiKP}}/A_{\text{PcP}}$ на сейсмических станциях, где обнаружены как волны PKiKP, так и волны PcP, а другая группа отношений амплитуд состоит из измерений, при которых, например, обнаружена волна PcP, но волна PKiKP не обнаружена. То есть можно полагать, что в последнем случае амплитуда волны PKiKP не превышает амплитуды сейсмического шума на временном интервале предполагаемого вступления волны PKiKP. Исключение из рассмотрения второй группы измерений может вести к получению оценки скачка плотности с присутствием систематического смещения. Однако, зная статистическое распределение отношения амплитуд волн PKiKP и PcP, мож-

но вычислить вероятность того, что $A_{PKiKP}/A_{PcP} < A_{n(PKiKP)}/A_{PcP}$, где $A_{n(PKiKP)}$ – измеренная амплитуда шума.

Воспользуемся тем, что в среде со случайными неоднородностями амплитуда наблюдаемого сигнала имеет логарифмически нормальное распределение [Татарский, 1967]. Отношение амплитуд РКiKP/РсР также будет иметь логарифмически нормальное распределение. Для оценки параметров этого распределения воспользуемся методом максимума правдоподобия [Ван Трис, 1972], в соответствии с которым искомые оценки – математическое ожидание m и дисперсия σ^2 определяются из условия максимума функции

$$L(m, \sigma^2 | a, b) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{0.5(N+K)}} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{(\ln b_i - m)^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\ln a_k} \exp\left(-\frac{(t - m)^2}{2\sigma^2}\right) dt, \quad (1)$$

где $L(m, \sigma^2 | a, b)$ – условная вероятность для m и σ^2 при условии, что измерены параметры a_i – отношение амплитуд волн A_{PKiKP}/A_{PcP} ($i = 1, \dots, N$), и b_k – отношение $A_{n(PKiKP)}/A_{PcP}$. Второй член со знаком произведения предполагает, что $b_i < a_i$, то есть амплитуда шума больше амплитуды волны РКiKP на i -ой станции и потому волна РКiKP не обнаружена, хотя заведомо присутствует на сейсмограмме.

Логарифмируя (1), получим более удобное для численных расчетов выражение

$$\ln(L(m, \sigma^2 | a, b)) = -\sum_{i=1}^N \frac{(\ln b_i - m)^2}{2\sigma^2} - N \ln \sigma + \sum_{k=1}^K \ln\left(1 + \Phi\left(\frac{\ln a_k - m}{2^{0.5}\sigma}\right)\right), \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл ошибок [Двайт, 1966]. За параметры распределения принимаются значения m и σ , на которых достигается максимальное значение функции $\max_{m, \sigma} \ln(L(m, \sigma^2 | a, b))$.

Данные результаты

Для количественных оценок используем данные из единственной известной нам публикации [Tkalčić et al., 2010], в которой приведена подробная исходная информация (таблица 1, цитируемой работы), включая тип проведённых измерений амплитуд РКiKP и РсР (по шуму или волновой форме, выделенной на фоне шума) и качество обнаруженных волновых форм. На основе этих данных были сформированы две группы измерений, представленные ниже в таблицах 1 и 2. Причём в табл. 1 – данные для первой группы измерений, где обнаружены как РКiKP, так и РсР, а в табл. 2 – для второй группы измерений (волновые формы РКiKP не обнаружены на части станций). Далее мы разделили выборку на две группы по эпицентральному расстоянию от очага до станции наблюдения. На эпицентральных расстояниях $11^\circ < \Delta < 13^\circ$ это измерения с номерами с 1 по 6 из табл. 1 и номером 1 из табл. 2 (соответствующие строки таблиц заштрихованы серым). На эпицентральных расстояниях $13^\circ < \Delta < 24^\circ$ это измерения с номерами с 7 по 14 из табл. 1 и номерами 2–7 из табл. 2.

На основе экспериментальных данных из таблиц 1 и 2 по формуле (2) была вычислена логарифмическая функция правдоподобия, а её рельеф для различных значений искомых параметров m и σ приведен на рис. 1.

Таблица 1. Параметры отношения амплитуд (a_i) для первой группы данных

№	Событие ггммдд	Станция	Эпицентрально- ное расстояние, градус	$A_{\text{пер}}$ отсчеты	$A_{\text{РККР}}$ отсчеты	$A_{\text{РККР}}/A_{\text{пер}}$
1	010207	ASHI	11.35	86.58	28.08	0.324
2	941007	BB10	11.67	9.87	2.42	0.245
3	941007	BB36	11.88	16.6	1.7	0.102
4	941007	BB14	12.27	24.05	1.46	0.061
5	941007	BB18	12.68	15.94	1.96	0.123
6	941007	BB20	12.88	63.15	17.09	0.271
7	941007	BB23	13.12	34.06	3.8	0.112
8	941007	SP25	13.41	48.01	6.6	0.137
9	010207	TNMA	14.74	112.86	25.39	0.225
10	941007	VOS	16.37	3552.21	200.45	0.056
11	941007	ZRN	17.49	2463	159.49	0.065
12	010207	SBT	17.8	21.71	2.05	0.094
13	010207	KUJ	19.34	32.2	3.9	0.121
14	010207	MONO	23.74	84.32	18.68	0.222

Таблица 2. Параметры отношения амплитуд (b_i) для второй группы данных

№	Событие ггммдд	Станция	Эпицентрально- ное расстояние, градус	$A_{\text{пер}}$ отсчеты	$A_{\text{РККР}}$ отсчеты	$A_{\text{РККР}}/A_{\text{пер}}$
1	010207	AIB	11.5	17.75	3.56	0.201
2	010207	AOB	17.03	115.53	6.06	0.052
3	010207	YHJ	18.26	17.47	3.75	0.214
4	010207	KZK	18.75	29.52	2.16	0.073
5	941007	AKT	22.96	193.61	12.64	0.065
6	010207	SHK	23.59	12.13	3.43	0.283
7	010207	SHK	23.59	12.13	3.43	0.283

Таблица 3. Сравнение двух видов оценок

Эпицентрально- ное расстояние	Максимум правдоподобия		Среднее	
	m	σ	m	σ
$11^\circ < \Delta < 13^\circ$	-1.9	0.67	-1.79	0.56
$13^\circ < \Delta < 24^\circ$	-2.45	0.6	-2.15	0.51

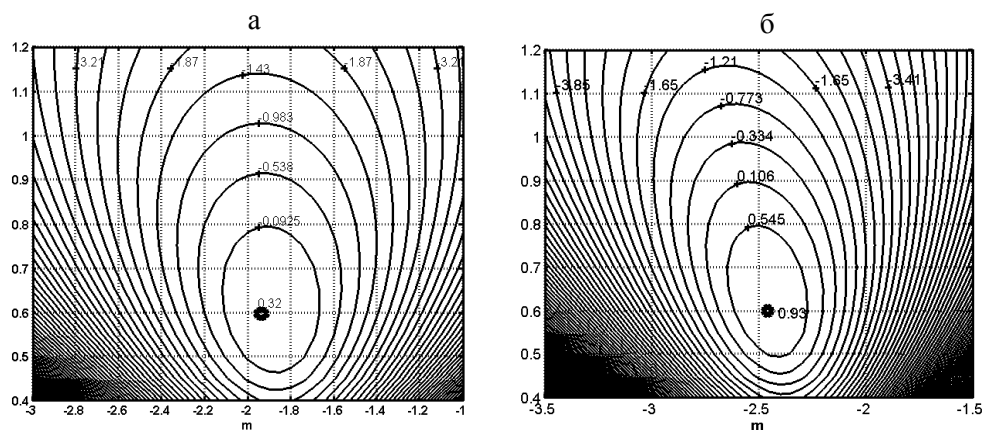


Рис. 1. Рельеф логарифмической функции правдоподобия в координатах (m ; σ) для диапазонов расстояний $11^\circ < \Delta < 13^\circ$ (а) и $13^\circ < \Delta < 24^\circ$ (б)

Полученные при этом оценки параметров m и σ приведены в табл. 3 вместе с оценками среднего и среднеквадратичного отклонения только по данным измерений обнаруженных амплитуд $A_{\text{РКИР}}$ и $A_{\text{РЕР}}$. Из табл. 3 следует, что, во-первых, оценки максимума правдоподобия параметра m имеют меньшие значения, чем оценки среднего и, во-вторых, что погрешность σ параметра m слабо зависит от эпицентрального расстояния. Так, для диапазона эпицентральных расстояний $13^\circ < \Delta < 24^\circ$ минимуму функции правдоподобия соответствуют значения $m = -2.45$ и $\sigma = 0.6$, а для диапазона $11^\circ < \Delta < 13^\circ$ $m = -1.9$ и $\sigma = 0.67$. Соответствующие значения m и σ без учета «негативных» измерений составили $m = -2.15$ и $\sigma = 0.51$ и $m = -1.79$ и $\sigma = 0.56$. Таким образом, в рассматриваемом примере данных относительная ошибка в определении скачка плотности двумя методами различается в 1.1 и 1.4 раза соответственно.

Результаты оценки скачка плотности на границе внутреннего ядра Земли различными методами по двум группам измерений представлены на рис. 2. Сравнение полученных оценок скачка плотности с модельными кривыми показывает, что учёт «негативной информации» даёт заметное снижение результирующих оценок. Как видно, учёт «негативной информации» методом максимального правдоподобия позволяет предположить, что величина скачка плотности находится в

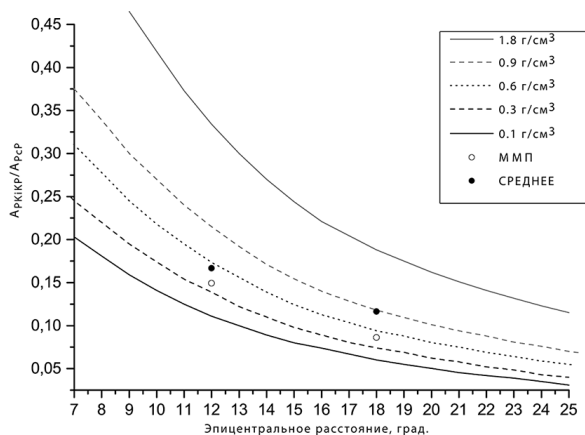


Рис. 2. Полученные оценки скачка плотности (методом максимального правдоподобия и среднее) и теоретические амплитудные отношения, рассчитанные для стандартной модели $ak135$ [Kennett et al., 1995] и скачков плотности, указанных в легенде в правом верхнем углу

диапазоне $0.3\text{--}0.6\text{ г/см}^3$. В то время как оценка только по средним значениям обнаруженных волновых форм РКiKP и PcP даёт немного большую величину – порядка $0.6\text{--}0.9\text{ г/см}^3$.

Представленный выше анализ данных независимого источника показывает, что оценки скачка плотности по амплитудному отношению волн РКiKP и PcP без учёта «негативной информации» имеют тенденцию к завышению. По-видимому, именно этим эффектом можно объяснить, по крайней мере некоторую часть, систематического смещения этих оценок относительно оценок скачка плотности, полученных по данным собственных колебаний Земли.

Исследования выполнены в рамках Гос. задания (проект № 0146-2014-0004).

Литература

Адушкин В.В., Ан В.В., Овчинников В.М., Краснощеков Д.Н. О скачке плотности на внутренней границе земного ядра по наблюдениям волн РКiKP на расстояниях около 6° // Доклады Академии Наук. Т. 354, № 3, с. 382–385, 1997.

Бурмин В.Ю. Распределение плотности и упругих параметров в Земле // Физика Земли, № 7, с. 76–88, 2006.

Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том 1. М. : Советское радио, 1972. – 744 с.

Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. : Физматгиз, 1966. – 229 с.

Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М. : Наука, 1967. – 548 с.

Bolt B.A., Qamar A. An upper bound to the density jump at the boundary of the Earth's inner core // Nature. Vol. 228, № 5267, P. 148–150, 1970.

Dziewonski, A.M., Anderson, D.L. Preliminary reference Earth model // Physics of the Earth Planetary Interiors. Vol. 25. P. 297–356, 1981.

Gubbins D., Masters T.G., Jacobs J.A. Thermal Evolution of the Earth's core // Journal Geophys. RAS. Vol. 59, P. 57–99, 1979.

Kennett, B.L.N., Engdahl, E.R. & Buland, R. Constraints on the velocity structure in the Earth from travel times // Geophysical Journal International. Vol. 122, P. 108–124, 1995.

Koper, K.D., M.L. Pyle. Observations of PKiKP/PcP amplitude ratios and implications for Earth structure at the boundaries of the liquid core // Journal of Geophysical Research. Vol. 109, B03301, doi:10.1029/2003JB002750, 2004.

Masters, T.G., D. Gubbins. On the resolution of density within the Earth // Physics of the Earth and planetary interiors. Vol. 140. P. 159–167, 2003.

Ringdal F. On the estimation of seismic detection thresholds // Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 65 № 6 P. 1631–1642, 1975.

Shearer P., Masters G. 1990. The density and shear velocity contrast at the inner core boundary // Geophysical Journal International, Vol. 102, P. 491–498, 1990.

Tkalčić H., Cormier V.F., Kennett B.N.L., He K. Steep reflections from the earth's core reveal small-scale heterogeneity in the upper mantle // Physics of the Earth and planetary interiors. Vol. 178, P. 80–91, 2010.

Tkalčić H. Complex inner core of the Earth: The last frontier of global seismology // Reviews of geophysics. Vol. 53, doi:10.1002/2014RG000469, 2015.