

УДК 550.34; 551.24; 539.375

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЕЙСМОАКТИВНОЙ ЗОНЕ

© 2022 г. А. С. Ким^{1*}, Ю. Р. Шпади², Ю. Г. Литвинов³¹Казахстанский научный центр Международной академии наук Евразии, Алматы, Казахстан²Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан³Академия гражданской авиации, Алматы, Казахстан

*E-mail: kim.as@mail.ru

Процессы перехода горных пород перед землетрясениями из ненарушенного состояния в состояние динамического разрушения, в условиях ограниченности объема очаговой зоны и сжатия на больших глубинах, происходят замедленно. Такое замедление может быть использовано в прогностических целях. В настоящей статье приведены результаты математического и компьютерного моделирования динамических и квазистатических процессов в очаговых зонах землетрясений. Исследовано движение упругой среды при внезапном возникновении разрыва вдоль конечной полосы в условиях продольного сдвига с учетом контактного вязкого трения. Использование точного решения этой задачи, построенного методом суперпозиции, удобно для первых вступлений отраженных волн и затруднено при многократных отражениях. В связи с этим в данной работе применен другой подход, заключающийся в сведении краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода в изображениях, решение которого при определенных условиях позволяет получить параметры движения среды в произвольный момент времени. Этими условиями является достаточно большая величина эффективной вязкости на разрыве, когда реализуется квазистатический нестационарный процесс. Применив метод решения интегральных уравнений в изображениях, который использует формулу Гильберта-Шмидта для резольвентного ядра и разложение нормируемого симметричного ядра в билинейный ряд по собственным функциям, получено решение квазистатического интегрального уравнения в изображениях. Далее, обращением решения в изображениях, получено решение в оригинале. Из условий близости приближенного (квазистатического) решения и общего (динамического) решения соответствующего интегрального уравнения, получена оценка нижней границы эффективной вязкости на разрыве для перехода от решения динамической нестационарной задачи к решению квазистатической нестационарной задачи. Исследовано соответствие полученного условия квазистатичности процессов имеющимся экспериментальным лабораторным и геофизическим данным. С помощью аналитических методов совместно с численным счетом получены графики квазистатических нестационарных смещений берегов разрыва и коэффициента интенсивности напряжений на его концах, зависящие от фоновых напряжений, эффективной вязкости на разрыве, координат и времени. Получено общее решение квазистатической задачи для смещений и скоростей смещений берегов разрыва в виде статической поверхности в нормированной системе координат. Получено общее решение квазистатической задачи для коэффициента интенсивности касательных напряжений на концах разрыва в нормированных координатах.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный процесс, вязкий разрыв, скорость смещений, концентрация напряжений.

Для цитирования: Ким А.С., Шпади Ю.Р., Литвинов Ю.Г. Математическое моделирование нестационарных процессов в сейсмоактивной зоне // Динамические процессы в геосферах, 2022, т. 14. № 1. С. 69–84. http://doi.org/10.26006/22228535_2022_14_1_69.

Введение

В различных геосферах Земли, включая её твердые, жидкие и газообразные оболочки, происходят сложные динамические и квазистатические процессы, исследованию которых в настоящее время уделяется большое внимание, что связано с необходимостью прогнозирования природных явлений

и тенденций на нашей планете. Среди этих исследований важное место занимают изучение нестационарных процессов в очаговых зонах землетрясений, расчеты вертикальных и горизонтальных движений земной поверхности, изучение динамики блочных структур и разломов [Кочарян и др., 2014; Павлов и др., 2013; Кузьмин, 2013], которые являются мощными источниками возмущений в литосфере [Moore, Lockner, 2013], контролирующими миграцию сейсмической активности, фильтрацию флюидов и разрушение горных пород. Эти исследования актуальны и в динамике литосферно – ионосферных взаимодействий [Бондур, Смирнов, 2005], связанных с откликом ионосферы на динамические и квазистатические процессы в очаговых зонах земной коры, предваряющие и сопровождающие разрушительные землетрясения.

Очаги тектонических землетрясений располагаются на больших глубинах и не доступны непосредственным наблюдениям. В связи с этим в исследованиях большую роль играют методы математического и компьютерного моделирования процессов в очаговых зонах [Kim et al., 2019; Kim, Shpadi, 2019]. Аналитические решения, получаемые в механике разрушения и в механике очага тектонического землетрясения, обычно имеют сложный вид, который затруднительно использовать в инженерных расчетах и приложениях, а имеющиеся оценки сделаны в основном для процессов в дальней зоне от источника. Между тем, например, при изучении литосферно-ионосферных связей, используемых для прогноза землетрясений, необходимы данные о кинематике и динамике в ближней очаговой зоне. Эти данные необходимы для оценки электрокинетических процессов, вариаций геомагнитного, гравитационного и других геофизических полей в периоды сейсмической активизации [Ким, 2011; Ким и др., 2014; Khachikyan et al., 2016; Ким и др., 2020]. В настоящей статье обращается внимание именно на модельное изучение и представление нестационарных процессов в ближней очаговой зоне землетрясения.

Математическая модель и решение краевой задачи

В упругом изотропном предварительно напряженном пространстве, находящемся в условиях продольного сдвига, мгновенно возникает разрыв вдоль конечной полосы. Предполагается, что плоскость разрыва совпадает с плоскостью максимальных касательных напряжений, а сам разрыв представляет собой «жидкую фазу» [Костров, 1975] или «некомпетентный слой» [Ержанов и др., 1975]. В этих условиях взаимодействие берегов разрыва описано законом вязкого трения, когда напряжения на разрыве пропорциональны скорости взаимного движения его берегов.

На рис. 1 указано расположение разрыва в предварительно напряженной среде в условиях антиплоской деформации с безразмерными параметрами.

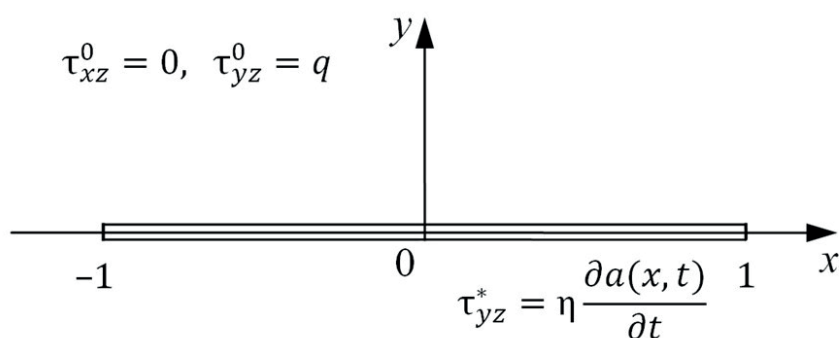


Рис. 1. Расположение разрыва в предварительно напряженной среде

Здесь в безразмерной форме: τ_{xz}^0 и τ_{yz}^0 – компоненты тензора напряжений исходного состояния упругой среды; η – эффективная вязкость на разрыве; q – фоновые напряжения; x, y – декартовы координаты; t – время; τ_{yz}^* – напряжения на разрыве при $y = 0, -1 < x < 1$; $a(xt)$ – взаимные смещения берегов разрыва.

Постановка начально-краевой задачи

Суперпозицией соответствующего решения w_p^0 статической задачи и искомого решения w_p динамической задачи напряжения q_p на бесконечности приводятся к напряжениям на разрыве, а рассматриваемая задача – к решению краевой, которая в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

Начальные условия при $t \leq 0$ для $y > 0$ и $y < 0$:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad t \leq 0 \quad (2)$$

Условия на линии $y = 0$.

На разрыве заданы мгновенно меняющиеся при $t = 0$ контактные условия:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= 0, \quad \text{if } t < 0 \\ \tau_{yz} &= \eta \frac{\partial a}{\partial t} - q, \quad \text{if } t > 0 \\ a &= 0, \quad \text{if } t = 0 \end{aligned} \right\}, \quad y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (3)$$

При $y = 0, x > 1$ и $x < -1$ за пределами разрыва, рассматриваемая среда сохраняет состояние сплошности и условие непрерывности перемещений

$$a = 0, \quad \text{при } x > 1 \text{ и } x < -1 \quad (4)$$

Размерные величины связаны с безразмерными параметрами соотношениями:

$$w_p^1 = w_p^0 + w_p, \quad w_p^0 = \frac{q_p y_p}{\mu}, \quad q_p = \mu q, \quad t_p = \frac{Lt}{b}, \quad \eta_p = \frac{\mu \eta}{b}, \quad (5)$$

$$(x_p, y_p, w_p, a_p) = L(x, y, w, a)$$

Здесь размерные величины: w_p^1 – перемещения среды; x_p, y_p – декартовы координаты; t_p – время; w_p – смещения среды относительно исходного w_p^0 состояния; a_p – взаимные смещения берегов разрыва; τ_{xz}^p, τ_{yz}^p – компоненты тензора напряжений, q_p – фоновые сдвиговые напряжения; η_p – коэффициент эффективной вязкости на разрыве, μ – модуль сдвига упругой среды, $2L$ – ширина разрыва, b – скорость поперечных волн.

В силу четности функции перемещений $w(x, y, t)$ по x и нечетности по y достаточно рассмотреть четверть пространства $x > 0, y > 0$.

Приведение начально-краевой задачи к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода

Применив к волновому уравнению (1) преобразование Лапласа по времени t с параметром p и косинус-преобразование Фурье по координате x с параметром s , учитывая начальные условия (2), получим

уравнение в изображениях, общее решение которого с учетом нулевых условий на бесконечности запишем в виде

$$w_1(s, y, p) = C(s, p)e^{-\sqrt{s^2+p^2}y} \quad (6)$$

Из граничных условий (3)–(4), учитывая (6) получим парную систему интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \left[\sqrt{s^2+p^2} + 2\eta p \right] C(s, p) \cos(sx) ds &= \frac{\pi}{2} \frac{q}{p}, \quad |x| < 1 \\ \int_0^\infty C(s, p) \cos(sx) ds &= 0, \quad |x| \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из второго уравнения системы (7) с учетом (6) получим представление

$$C(s, p) = \int_0^1 w(\xi, 0, p) \cos(\xi s) d\xi \quad (8)$$

Учитывая асимптотику на конце разрыва, известную из теории разрушения [Костров, Никитин, 1970], [Нобл, 1962]

$$w(x, 0, p) \sim (1-x^2)^{1/2}, \quad x \rightarrow 1, \quad x < 1,$$

представим, что функцию $w(x, 0, p)$ в виде [Мартынюк, 1975]

$$w(x, 0, p) = \int_x^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi(\beta, p)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta \quad (9)$$

Тогда из первого уравнения системы (7) с учетом (9), после вычисления соответствующих интегралов, получим интегральное уравнение типа Фредгольма 2-го рода в изображениях

$$\psi(\beta, p) + \int_0^1 K(\beta, \gamma, p) \psi(\gamma, p) d\gamma = \frac{q}{p} \sqrt{\beta}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (10)$$

где ядро $K(\beta, \gamma, p)$ имеет вид

$$\begin{aligned} K(\beta, \gamma, p) &= \frac{2}{\pi} \eta p k K(k) + p \sqrt{\beta \gamma} \int_0^\infty \theta(s, p) J_0(s\beta) J_0(s\gamma) ds + \\ &+ p^2 \sqrt{\frac{\beta \gamma}{2}} \left\{ I_0\left(\frac{\beta p}{2}\right) K_0\left(\frac{\gamma p}{2}\right) H(\gamma - \beta) + I_0\left(\frac{\gamma p}{2}\right) K_0\left(\frac{\beta p}{2}\right) H(\beta - \gamma) \right\} \\ \theta(s, p) &= \frac{p^5}{\left(s + \sqrt{s^2 + p^2}\right)^3 (4s^2 + p^2)}, \quad k = \frac{2\sqrt{\beta \gamma}}{\beta + \gamma} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $K(\xi)$, $J_0(\xi)$, $K_0(\xi)$, $I_0(\xi)$, $H(\xi)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода, функция Бесселя нулевого порядка, функция Макдональда нулевого порядка, модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и функция Хэвисайда от аргумента ξ , соответственно.

Представление смещений через решение интегрального уравнения

Из соотношений (6), (8) и (9), используя обратные интегральные преобразования, теорему о свертке и свойства бесселевых функций [Ватсон, 1949; Диткин, Прудников, 1974], получим решение задачи в перемещениях, выраженное через решение интегрального уравнения

$$w(x, y, t) = h_1 \int_{|x|}^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi(\beta, t)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta - y \cdot w^*(x, y, t), \quad (12)$$

$$\text{где } h_1 = H(1 - |x|), \quad w^*(x, y, t) = \int_0^\infty s \cos(sx) ds \int_y^t \frac{I_1\left(s\sqrt{\tau^2 - y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} H(\tau - y) d\tau \int_0^1 \sqrt{\beta} \psi(\beta, t - \tau) I_0(s\beta) d\beta$$

Из общей формулы (12), при $y = 0$, получим закон движения берегов разрыва, выраженный через решение $\psi(\beta t)$ интегрального уравнения

$$\psi(x, t) = \psi(x, 0, t) = h_1 \int_{|x|}^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi(\beta, t)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta \quad (13)$$

Коэффициент интенсивности напряжений на концах разрыва

Определим связь между коэффициентом интенсивности напряжений на конце разрыва и решением интегрального уравнения. Из (6) следует

$$\tau_{yz}(x, 0, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{s^2 + p^2} C(s, p) \cos(sx) ds \quad (14)$$

Из (14) следует

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, 0, p) = & \varphi(1, p) \int_0^\infty J_1(s) \cos(sx) ds + \varphi(1, p) \int_0^\infty g(s, p) J_1(s) \cos(sx) ds - \\ & - \int_0^\infty \frac{\sqrt{s^2 + p^2}}{s} ds \int_0^1 \varphi'(\beta, p) \beta J_1(s\beta) \cos(sx) d\beta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } g(s, p) = \frac{\sqrt{s^2 + p^2} + 2\eta p}{s} - 1; \quad \psi(\beta, p) = \sqrt{\beta} \varphi(\beta, p)$$

В правой части (15) особенность дает лишь первый интеграл при $x \rightarrow 1$ и $x > 1$ с учетом (16) можно записать в изображениях асимптотическую формулу

$$\tau_{yz}(x, 0, p) \cong \frac{K_{III}(p)}{\sqrt{2\pi(x-1)}}, \quad x \rightarrow 1, \quad x > 1 \quad (16)$$

откуда коэффициент интенсивности напряжений $K_{III}(t)$ в оригинале принимает вид

$$K_{III}(t) = \sqrt{\pi} \psi(1, t) \quad (17)$$

Решение статического аналога задачи для конечного разрыва

Из (10)–(11) с учетом (12) при $p \rightarrow 0$ получим решение статического аналога задачи в перемещениях

$$w_c(x, y) = q \left[-y + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 + 1 + \sqrt{(y^2 - x^2 + 1)^2 + 4x^2 y^2}} \right]$$

Полученный результат согласуется с решениями, приведенными в работах [Sih, 1965; Качанов, 1974]. В частности, перемещение берегов опишется формулой

$$w_c(x, 0) = q\sqrt{1 - x^2}, \quad |x| < 1$$

Нестационарные процессы в напряженной среде при больших контактных взаимодействиях на вязком разрыве

Решение интегрального уравнения в изображениях для квазистатического процесса

Квазистатическое приближение рассматриваемой нестационарной задачи имеет вид

$$\psi(\beta, p) - \lambda \int_0^1 K(\beta, \gamma) \psi(\gamma, p) d\gamma = f(\beta, p), \quad 0 < \beta < 1 \quad (18)$$

$$K(\beta, \gamma) = \frac{2}{\pi} k K(k), \quad k = \frac{2\sqrt{\beta\gamma}}{\beta + \gamma}, \quad \lambda = -\eta p, \quad f(\beta, p) = \frac{q}{p} \sqrt{\beta} \quad (19)$$

Применив метод решения интегральных уравнений в изображениях [Ким, 2006; Ким, 2017], который использует формулу Гильберта-Шмидта для резольвентного ядра [Интегральные..., 1968] и разложение нормируемого симметричного ядра в билинейный ряд по собственным функциям, получим решение интегрального уравнения (18) в изображениях

$$\psi(\beta, p) = f(\beta, p) + \lambda \sum_k \frac{\psi_k(\beta)}{\lambda_k - \lambda} \int_0^1 \psi_k(\xi) f(\xi, p) d\xi \quad (20)$$

Здесь $\psi_k(\xi)$ и λ_k – собственные функции и соответствующие им характеристические значения [Михлин, Смолицкий, 1965] интегрального уравнения (18) с ядром $K(\beta, \gamma)$ (19).

Обращением правой части (20) по Лапласу получим квазистатическое решение интегрального уравнения (18) в оригинале

$$\psi(\beta, t) = q\sqrt{\beta} - q \sum_k \psi_k(\beta) e^{-\frac{\lambda_k t}{\eta}} \int_0^1 \sqrt{\xi} \psi_k(\xi) d\xi \quad (21)$$

Представление параметров нестационарного процесса в зоне разрыва через квазистатическое решение интегрального уравнения

Смещения на разрыве получены в виде

$$w(x, t) = q\sqrt{1 - x^2} - q \sum_{n=1}^N d_n e^{-\frac{\lambda_n t}{\eta}} \int_x^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta, \quad d_n = \int_0^1 \psi_n(\xi) \sqrt{\xi} d\xi \quad (22)$$

Скорости смещений на разрыве равны

$$V(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{q}{\eta} \sum_{n=1}^N d_n e^{-\frac{\lambda_n t}{\eta}} \int_x^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta \quad (23)$$

Концентрация напряжений на конце разрыва описывается формулой [Слепян, 1981]

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi(x-1)}}, \quad x > 1, \quad x \rightarrow 1 \quad (24)$$

Коэффициент интенсивности напряжений равен

$$K_{III}(t) = \sqrt{\pi} \psi(1, t) = q \sqrt{\pi} \left(1 - \sum_{n=1}^N d_n \psi_n(1) e^{-\frac{\lambda_n t}{\eta}} \right) \quad (25)$$

Общее решение квазистатической задачи для смещений на разрыве в нормированных координатах

Нормированные смещения w^* на разрыве равны

$$w^*(x, \tau) = \frac{1}{q} w(x, t) \Big|_{t=\eta\tau} = \sqrt{1-x^2} - \sum_{n=1}^N d_n e^{-\lambda_n \tau} \int_x^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta, \quad \tau = \frac{t}{\eta} \quad (26)$$

Нормированные скорости смещений V^* на разрыве равны

$$V^*(x, \tau) = \frac{\eta}{q} V(x, t) \Big|_{t=\eta\tau} = \frac{\eta}{q} \cdot \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=\eta\tau} = \sum_{n=1}^N \lambda_n d_n e^{-\lambda_n \tau} \int_x^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} d\beta \quad (27)$$

Общее решение квазистатической задачи для коэффициента интенсивности напряжений на концах разрыва в нормированных координатах

Нормированный коэффициент интенсивности напряжений в вершине разрыва равен

$$K_{III}^*(\tau) = \frac{1}{q} K_{III}(t) \Big|_{t=\eta\tau} = \sqrt{\pi} \left(1 - \sum_{n=1}^N d_n \psi_n(1) e^{-\lambda_n \tau} \right), \quad \tau = \frac{t}{\eta} \quad (28)$$

Нижняя граница коэффициента эффективной вязкости для перехода от динамической задачи к квазистатической задаче

При увеличении эффективной вязкости η на разрыве возрастает влияние первой квазистатической части $K_{qstat}(\beta, \gamma, p)$ ядра (11) на решение общего интегрального уравнения (10), где

$$K_{qstat}(\beta, \gamma, p) = \frac{2}{\pi} \eta p k K(k) \quad (29)$$

По достижении достаточно большой величины эффективной вязкости на разрыве $\eta > \eta_B$ динамический процесс переходит в квазистатический процесс.

Оценим величину нижней границы η_B эффективной вязкости на разрыве, когда реализуется нестационарный квазистатический процесс. Для перехода от динамической задачи к квазистатической задаче необходимо выполнение условия

$$\eta > \eta_B \quad (30)$$

Параметр η_B находится из соотношения

$$\varepsilon_m(\eta_B) = \varepsilon_B, \text{ при условии } \varepsilon_B \ll 1, \text{ где} \quad (31)$$

$$\varepsilon_m(\eta_B) = \varepsilon_m(\eta) \Big|_{\eta=\eta_B}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_m(\eta) = \max_p \{ \varepsilon(\eta, p) \}, \quad (33)$$

$$\varepsilon(\eta, p) = \frac{\|K(\beta, \gamma, p) - K_{qstat}(\beta, \gamma, p)\|}{\|K_{qstat}(\beta, \gamma, p)\|} = \frac{1}{\eta} \frac{\|K_h(\beta, \gamma, p)\|}{\|K(\beta, \gamma)\|} \quad (34)$$

$$K_{qstat}(\beta, \gamma, p) = \frac{2}{\pi} \eta p k K(k), \quad K(\beta, \gamma) = \frac{2}{\pi} k K(k), \quad k = \frac{2\sqrt{\beta\gamma}}{\beta + \gamma} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} K_h(\beta, \gamma, p) = p^2 \sqrt{\frac{\beta\gamma}{2}} \left\{ I_0\left(\frac{\beta p}{2}\right) K_0\left(\frac{\gamma p}{2}\right) H(\gamma - \beta) + I_0\left(\frac{\gamma p}{2}\right) K_0\left(\frac{\beta p}{2}\right) H(\beta - \gamma) \right\} + \\ + p \sqrt{\beta\gamma} \int_0^\infty \theta(s, p) J_0(s\beta) J_0(s\gamma) ds \end{aligned} \quad (36)$$

Вычислительная формула для нормы функции $F(x, y)$, заданной в квадрате $0 < x, y < 1$, имеет вид:

$$\|F(x, y)\| = \left\{ \int_0^1 dy \int_0^1 F^2(x, y) dx \right\}^{1/2} \quad (37)$$

Учитывая (34), представим $\varepsilon(\eta, p)$ в виде

$$\varepsilon(\eta, p) = \frac{1}{\eta} f_K(p), \quad f_K(p) = \frac{\|K_h(\beta, \gamma, p)\|}{\|K(\beta, \gamma)\|} \quad (38)$$

Оценка нижней границы эффективной вязкости для квазистатичности нестационарного процесса

Задача нахождения функции $\varepsilon_m(\eta)$ свелась к определению максимума функции $f_K(p)$. На рис. 2 приведен график функции $f_K(p)$.

Как это следует из графика, представленного на рис. 2,

$$\max_p f_K(p) = \frac{1}{2} \quad (39)$$

откуда

$$\varepsilon_m(\eta) = \max_p \varepsilon(\eta, p) = \frac{1}{\eta} \cdot \max_p f_K(p) = \frac{0.5}{\eta} = \frac{1}{2\eta} \quad (40)$$

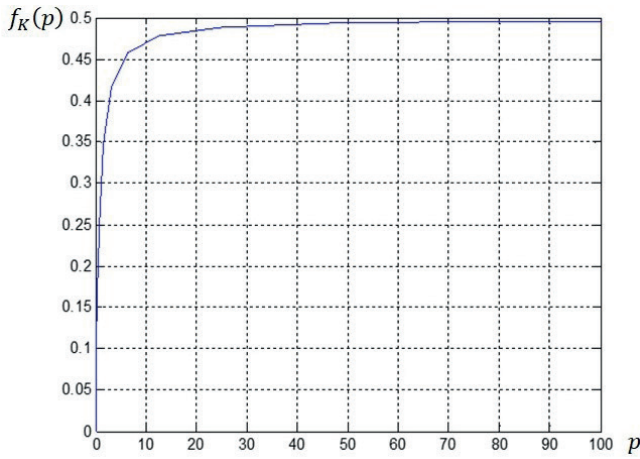


Рис. 2. График функции

При $\varepsilon_m(\eta) = 0.01$, учитывая (24)–(25), получим параметр η_B

$$\eta_B = \frac{1}{2\varepsilon_B} = \frac{1}{2 \cdot 0.01} = 50, \quad (41)$$

что соответствует в размерной форме нижней границе η_B^{eff} эффективной вязкости разломной зоны для квазистатичности нестационарного процесса

$$\eta_B^{eff} = \frac{\mu \eta_B}{b} = \frac{3.3 \cdot 10^{10} \cdot 50}{3496} = 4.72 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot \text{с/м} \quad (42)$$

Соответствие полученного условия квазистатичности имеющимся данным лабораторных экспериментов и геофизических наблюдений

В лабораторных квазистатических экспериментах при моделировании сдвиговой разломной зоны вязкость материала сдвиговой зоны бралась равной $\eta_r = 10^7 \text{ Па} \cdot \text{с}$, при ширине $h_r = 0.04 \div 0.07 \text{ м}$ [Борняков, Семинский, 1991]. В этом случае для эффективной вязкости разломной зоны имеет место оценка

$$\eta_r^{eff} = \frac{\eta_r}{h_r} \sim 10^8 \text{ Па} \cdot \text{с/м},$$

что соответствует по порядку нижней границе η_B^{eff} эффективной вязкости (42) на разломе для квазистатичности процессов в эксперименте.

Если разломная зона сдвига имеет ширину 30–40 км и вязкость $\eta_r = 10^{18} \div 10^{19} \text{ Па} \cdot \text{с}$ [Дядьков и др., 2006], то эффективная вязкость разломной зоны равна

$$\eta_r^{eff} = \frac{\eta_r}{h_r} \geq \frac{10^{18}}{4 \cdot 10^4} = 2.5 \cdot 10^{13} > \eta_B^{eff} \text{ Па} \cdot \text{с/м}$$

В зонах разломов, где присутствуют флюиды, величина вязкости будет на один-два порядка ниже [Курскеев, 1990]. В этом случае для эффективной вязкости на разломе шириной до 40 км получим оценку

$$\eta_r^{eff} = \frac{\eta_r}{h_r} \geq \frac{10^{16}}{4 \cdot 10^4} = 2.5 \cdot 10^{11} > \eta_B^{eff} \text{ Па} \cdot \text{с/м}$$

Как это следует из оценок, в обоих случаях условие квазистатичности для разломных зон выполнено:

$$\eta_r^{eff} > \eta_B^{eff}.$$

Для астеносферы при вязкости $\eta_a = 4 \cdot 10^{19} \text{ Па} \cdot \text{с}$ [Тёркот, Шуберт, 1985] и толщине $h_a = 10^5 \text{ м}$ эффективная вязкость равна

$$\eta_a^{eff} = \frac{\eta_a}{h_a} = \frac{4 \cdot 10^{19}}{10^5} = 4 \cdot 10^{14} > \eta_B^{eff} \text{ Па} \cdot \text{с/м}$$

Условие квазистатичности для астеносферы выполнено: $\eta_a^{eff} > \eta_B^{eff}$

Поле ускорений на основе аналитического решения динамической задачи при внезапном возникновении разрыва и условие квазистатичности

На рис. 3 приведено поле ускорений за фронтом цилиндрической волны, на основе аналитического решения задачи о внезапном возникновении полубесконечного разрыва [Ким, 2015], при возрастании эффективной вязкости η_r^{eff} на разрыве в момент времени равный 10 сек [Ким и др., 2016]

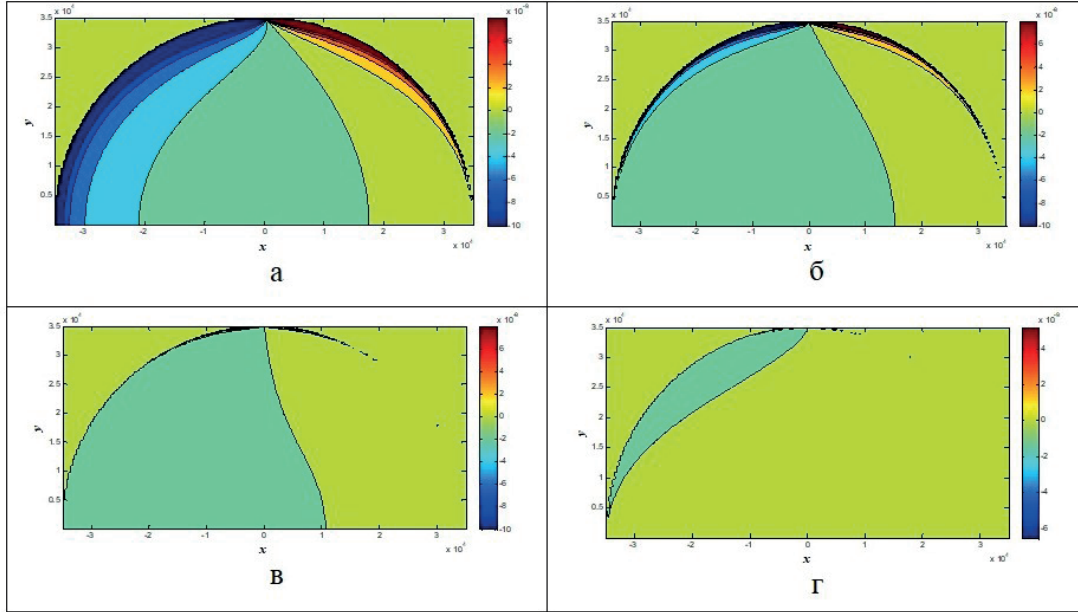


Рис. 3. Поле ускорений за фронтом цилиндрической волны: а) при $\eta = 0$, $\eta_r^{eff} = 0$; б) при $\eta = 1$, $\eta_r^{eff} = 9.44 \cdot 10^6$ Па·с/м; в) при $\eta = 10$, $\eta_r^{eff} = 9.44 \cdot 10^7$ Па·с/м; г) при $\eta = 50$, $\eta_r^{eff} = 4.72 \cdot 10^8$ Па·с/м

Как показывают рисунки, с увеличением эффективной вязкости на разрыве возмущенная зона за фронтом цилиндрической волны постепенно сглаживается и при $\eta_B^{eff} \sim 10^8 - 10^9$ Па·с/м доминирующим становится квазистатическое распределение нестационарного процесса, что соответствует оценке (42) нижней границы эффективной вязкости на разрыве для квазистатичности нестационарного процесса.

Результаты компьютерной визуализации нестационарного процесса

Нестационарные смещения берегов разрыва

На рис. 4 представлено общее решение квазистатической задачи для смещений на разрыве в виде статической поверхности (26) в безразмерных нормированных координатах при ориентациях осей координат в направлениях (а) и (б).

Частное решение для смещений на разрыве в размерной форме, учитывая (22) и (5), дается формулой

$$w_p(x_p, t_p) = \frac{q_p}{\mu} \sqrt{L^2 - x_p^2} - \frac{Lq_p}{\mu} \sum_{n=1}^N d_n e^{-\lambda_n \frac{\mu t_p}{L\eta_p}} \int_{\frac{x_p}{L}}^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x_p}{L}\right)^2}} d\beta, \quad d_n = \int_0^1 \psi_n(\xi) \sqrt{\xi} d\xi$$

На рис. 5 представлено частное решение для смещений на разрыве на заданном промежутке времени при $L = 10^4$ м; $b = 3.5 \cdot 10^3$ м/с; $q_p = 6 \cdot 10^6$ Па; $\mu = 3.3 \cdot 10^{10}$; $\eta_p = 10^9$ Па·с/м; $-L < x_p < L$.

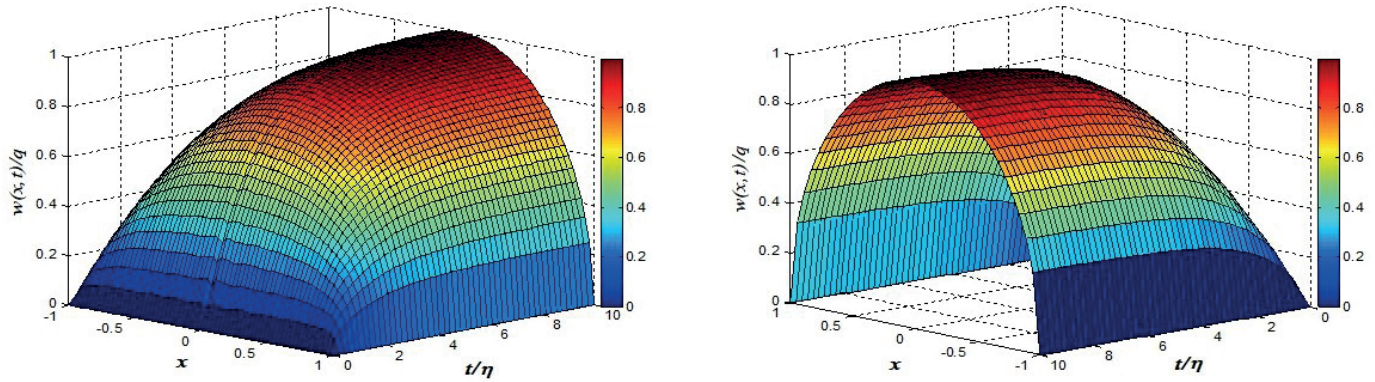


Рис. 4. Общее решение квазистатической задачи для перемещений в нормированных координатах в виде статической поверхности в положении (а) и (б)

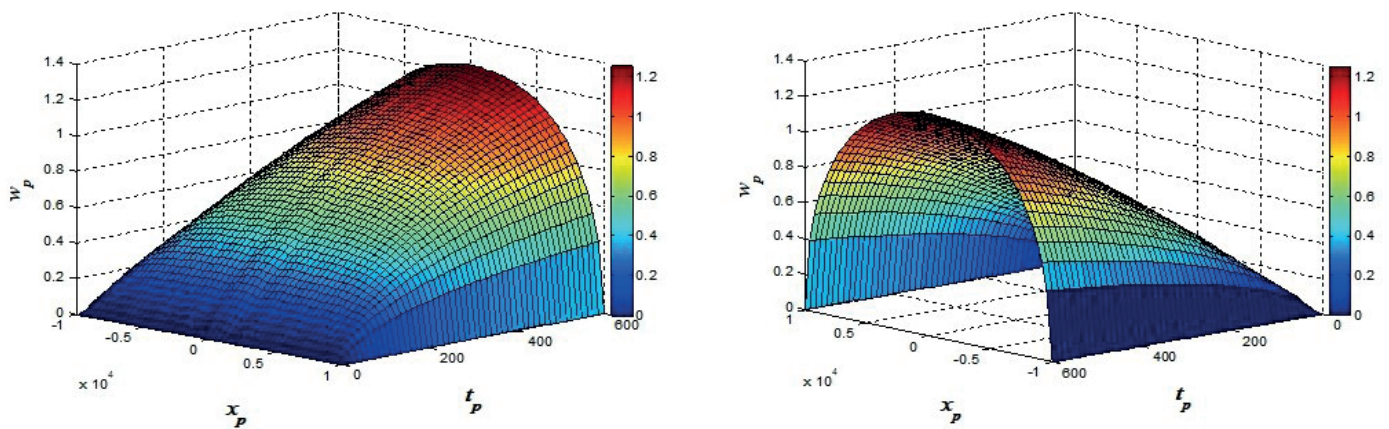


Рис. 5. Частное решение. Смещения на разрыве в размерной форме на промежутке времени $0 < t_p < 6 \cdot 10^2$ с в положении (а) и (б)

Скорость медленных смещений на разрыве

На рис. 6 представлено общее решение квазистатической задачи в виде поверхности для скоростей смещений на разрыве (27) в нормированной системе координат

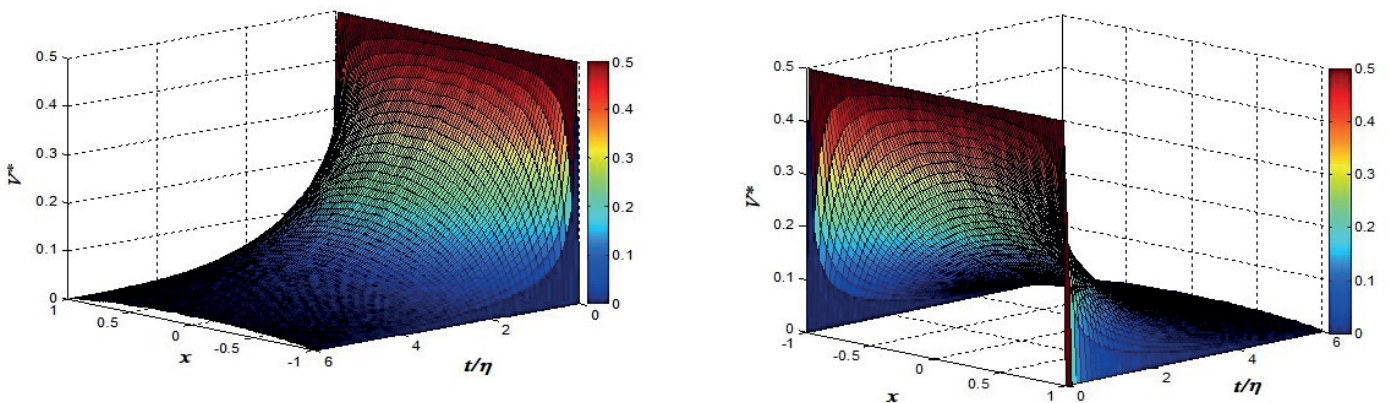


Рис. 6. Общее решение квазистатической задачи в виде статической поверхности для скоростей смещений на разрыве в нормированной системе координат

Скорость медленных смещений на разрыве в размерной форме, учитывая (23) и (5), дается формулой

$$\frac{\partial w_p(x_p, t_p)}{\partial t_p} = \frac{q_p}{\eta_p} \sum_{n=1}^N \lambda_n d_n e^{-\lambda_n \frac{\mu t_p}{L \eta_p}} \int_{x_p/L}^1 \frac{\sqrt{\beta} \psi_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - (x_p/L)^2}} d\beta, \quad d_n = \int_0^1 \psi_n(\xi) \sqrt{\xi} d\xi$$

На рис. 7 представлено частное решение для скорости смещений на разрыве при $L = 10^4$ с; $b = 3.5 \cdot 10^3$ м/с; $q_p = 6 \cdot 10^6$ Па; $\mu = 3.3 \cdot 10^{10}$ Па; $\eta_p = 10^9$ Па·с/м; $-L < x_p < L$.

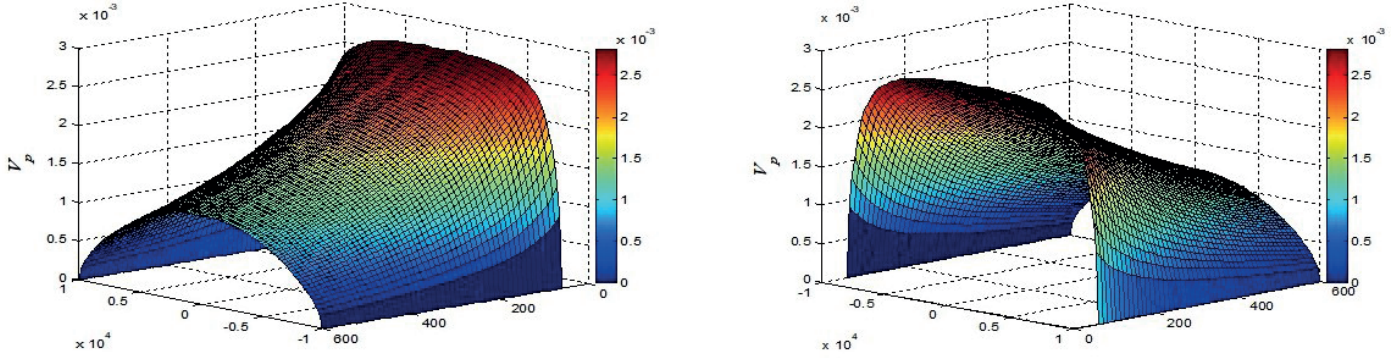


Рис. 7. Частное решение. Скорости смещений на разрыве в размерной форме на промежутке времени $60 < t_p < 600$ с в положении (а) и (б)

Концентрация напряжений в вершине разрыва

Общее решение для коэффициента интенсивности касательных напряжений в вершине разрыва представлено в нормированных координатах (28) на рис. 8. Концентрация напряжений на конце разрыва в размерной форме, учитывая (24) и (5), даётся соотношением:

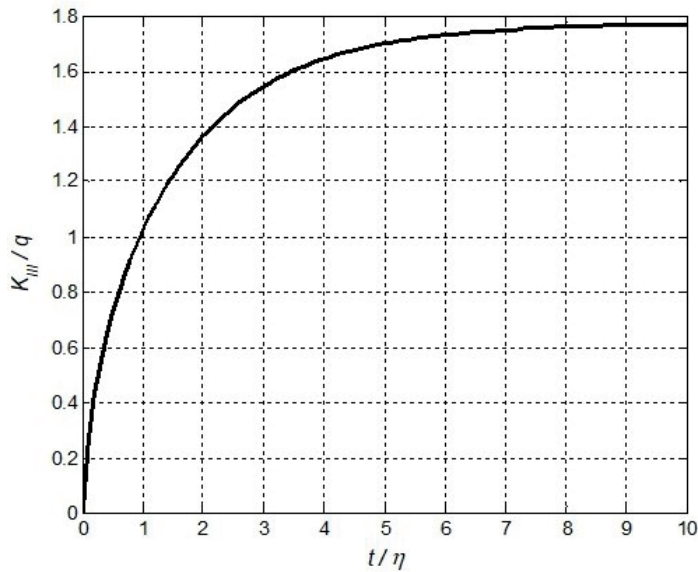


Рис. 8. Общее решение. Коэффициент интенсивности напряжений K_{III}^* в нормированной системе координат

$$\tau_{yz}^p(x_p, 0, t_p) \cong \frac{K_{III}^p(t_p)}{\sqrt{2\pi(x_p - L)}}, \quad |x_p| \rightarrow L, \quad |x_p| > L,$$

где коэффициент интенсивности касательных напряжений в размерной форме, учитывая (25) и (5), имеет вид

$$K_{III}^p(t_p) = q_p \sqrt{\pi L} \left(1 - \sum_{n=1}^N d_n \psi_n(1) e^{-\lambda_n \frac{\mu t_p}{L \eta_p}} \right)$$

Нарис. 9 представлены графики коэффициента интенсивности касательных напряжений в вершине разрыва для частных случаев (а) и (б). Рис. 9а соответствует параметрам: $L = 10^4$ м; $b = 3500$ м/с; $q_p = 6 \cdot 10^6$ Па; $\mu = 3.3 \cdot 10^{10}$ Па; $\eta_p = 10^9$ Па·с/м; $0 < t_p < 10^3$ с.

Рис. 9б соответствует параметрам: $L = 10^4$ м; $b = 3500$ м/с; $q_p = 10^5$ Па; $\mu = 3.3 \cdot 10^{10}$ Па; $\eta_p = 10^{10}$ Па·с/м; $0 < t_p < 8 \cdot 10^3$ с.

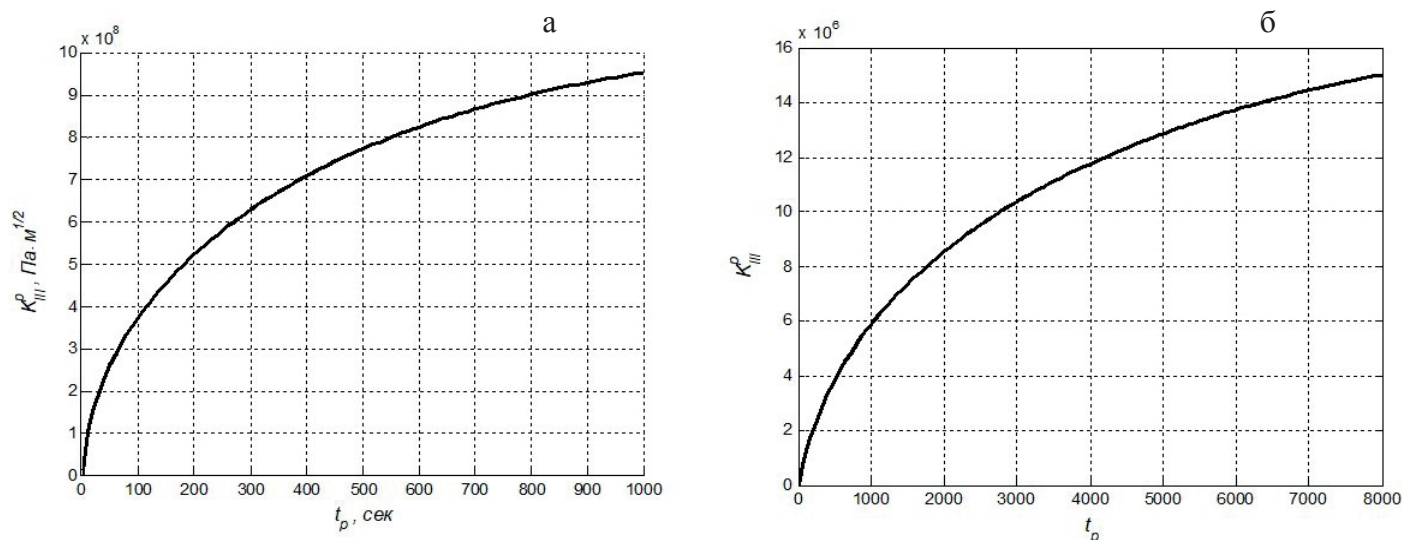


Рис. 9. Частные случаи для коэффициента интенсивности напряжений в вершине разрыва

Обсуждение

Через естественные волноводы, которыми являются разломные зоны, механоэлектрические процессы в очаговых зонах, фазовые переходы в минералах, составляющих горные породы, вызывают вариации геофизических полей на земной поверхности, в атмосфере и ионосфере. В свою очередь эти вариации могут быть замечены современными наземными и спутниковыми наблюдениями.

При постановке и решении нестационарных задач геомеханики, исходя из опыта и данных наблюдений, изначально принимается какая это задача (динамическая или квазистатическая) и в зависимости от этого применяется (разрабатывается) метод решения. После получения решения задачи (аналитического или численного) проводится исследование зависимости полученного решения от параметров задачи, причем границы изменения параметров произвольные и никак не связаны с выбором метода решения. Это обстоятельство вносит неопределенность в применение полученного математического решения задачи.

В данной работе обращается внимание на это обстоятельство, когда при малых значениях эффективной вязкости на разрыве мы имеем дело с динамической задачей, а при больших значениях эффективной вязкости – с квазистатической. Из условий близости приближенного (квазистатического) решения и общего (динамического) решения соответствующего интегрального уравнения, получена оценка нижней границы эффективной вязкости на разрыве η_B^{eff} , когда динамическую задачу с вязким разрывом можно заменить квазистатической задачей и её решением. Подтверждено соответствие полученного условия квазистатичности имеющимся экспериментальным лабораторным и геофизическим данным.

Заключение

Разработана математическая модель динамических и квазистатических процессов в очаговых зонах землетрясений. Исследовано движение упругой среды при внезапном возникновении разрыва вдоль конечной полосы в условиях продольного сдвига с учетом контактного вязкого трения. Использование точного решения этой задачи, построенного методом суперпозиции, удобно для первых вступлений отраженных волн и затруднено при многократных отражениях. В связи с этим применен другой подход, заключающийся в сведении краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода в изображениях, решение которого позволяет получить параметры движения среды в произвольный момент времени.

На основании аналитического исследования интегрального уравнения в изображениях и результатов численного анализа получена оценка минимальной величины коэффициента эффективной вязкости η_B^{eff} на разрыве для перехода от динамической нестационарной задачи к решению квазистатической нестационарной задачи.

С помощью аналитических методов совместно с численным счетом получены графики квазистатических нестационарных смещений берегов разрыва и коэффициента интенсивности напряжений на его концах, зависящие от фоновых напряжений, эффективной вязкости на разрыве, координат и времени. Получено общее решение квазистатической задачи для смещений и скоростей смещений берегов разрыва в виде статической поверхности в нормированной системе координат. Получено общее решение квазистатической задачи для коэффициента интенсивности касательных напряжений на концах разрыва в нормированных координатах.

Финансирование

Исследования проведены в рамках проекта № 0118РК00799 РБП-008 РК.

Список литературы

Бондур В.Г., Смирнов В.М. Метод мониторинга сейсмоопасных территорий по ионосферным вариациям, регистрируемым спутниковыми навигационными системами // Докл. РАН, 2005. Т. 402. № 5. С. 675–679.

Борняков С.А., Семинский К.Ж. Формирование структур сдвиговых зон / Разломообразование в литосфере. Зоны сдвига / Под редакцией Н.А. Логачева. Новосибирск: 1991. С. 94–151.

Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ. 1949. 799 с.

Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука. 1974. 542 с.

Дядьков П.Г., Назаров Л.А., Назарова Л.А. Трёхмерная модель литосферы Земли: методология построения и первые численные эксперименты / Физическая мезомеханика. Том 9. №1. 2006. С. 73–76.

Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаи И.А., Искакбаев А., Коксалов К. Теория складкообразования в земной коре. М.: Наука, 1975. 239 с.

Интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 448 с.

Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 311 с.

Ким А.С. Механика нестационарных процессов в очаговых зонах земной коры. Алматы: Ғылым ордасы. 2017. 282 с.

Ким А.С. Математическое моделирование динамических процессов в литосфере при внезапном возникновении разрыва // Известия НТО «КАХАК». 2016. № 2 (53). С. 53–64.

Ким А.С. О волнах сдвига в очаговой зоне при внезапном возникновении разрыва // Известия Научно-технического общества «КАХАК». 2015. № 2. С. 4–31.

Ким А.С. Медленные движения земной коры и концентрация напряжений в зоне вязкоупругого разлома // Доклады НАН РК, 2006, № 2. С. 73–76.

Ким А.С. Асейсмические движения в зоне тектонического разлома и вариации магнитного поля // Вестник ННГУ. 2011. № 4. Ч. 2. С. 457–458.

Ким А.С., Литвинов Ю.Г., Андреев А.Б., Капытин В.И. Мониторинг сейсмоактивных зон на основе обработки спутниковых гравитационных данных // Вестник НЯЦ РК. 2020. Вып. 3. С. 122–128.

Ким А.С., Мукашева С.Н., Соколова О.И., Бурлаков Г.В., Качусова О.Л. Особенности вариаций параметров геомагнитного поля в период землетрясения 28 января 2013 г. на территории Северного Тянь-Шаня // Вестник НЯЦ РК, 2014, № 2(58). С. 191–195.

Ким А.С., Шпади Ю.Р., Стихарный А.П., Литвинов Ю.Г. Распространение волн в очаговой зоне при внезапном возникновении разрыва: Обзор // Известия НТО «КАХАК». 2016. № 1. С. 4–36.

- Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. М. : Наука, 1975. 176 с.
- Костров Б.В., Никитин Л.В. Применение методов теории разрушения к изучению очагов землетрясений. Физические основания поисков методов прогноза землетрясений. М. : Наука. 1970. С. 9–27.
- Кочарян Г.Г., Остапчук А.А., Марков В.К., Павлов Д.В. Некоторые вопросы геомеханики разломов континентальной коры // Физика Земли. 2014. № 3. С. 51–64.
- Кузьмин Ю.О. Современная геодинамика разломов и парадоксы скоростей деформации // Физика Земли. 2013. № 5. С. 28–46.
- Курсеев А.К. Проблемы прогнозирования землетрясений. Алма-Ата: Наука, 1990. 264 с.
- Мартынюк П.А. О динамическом нагружении полуплоскости с трещиной в условиях антиплоской деформации. Динамика сплошной среды. Новосибирск: Наука. 1975. Вып. 22. С. 216–230.
- Михлин С.Г. и Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М. : Наука. 1965. 384 с.
- Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М. : ИЛ. 1962. 280 с.
- Павлов Д.В., Марков В.К., Свинцов И.С. Экспериментальное исследование изменения жесткости межблокового контакта при его сдвиговом деформировании // Динамические процессы в геосферах. 2013. № 4. С. 110–117.
- Слепян Л.И. Механика трещин. Л. : Судостроение. 1981. 296 с.
- Тёркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. В 2-х частях. М. : Мир. 1985. 731 с.
- Khachikyan G.Ya., Zhumabayev B.T., Streltsov A.V. Modification of the Ionosphere by Precursors of Strong Earthquakes // Radio Science Bulletin. 2016. No.357. P. 12–22: http://www.ursi.org/files/RSBissues/RSB_357_2016_06.pdf.
- Kim A.S., Shpadi Yu.R. Mathematical Modeling of Processes in a Stressed Medium for the Case of a Sudden Break in Continuity // Journal Moscow University Mechanics Bulletin, 74(5). September 2019. Vol. 74. Iss.5. P. 111–117. <http://link.springer.com/article/10.3103/S0027133019050029>.
- Alexandr Kim, Yuriy Shpadi, Yuriy Litvinov. Mathematical modeling of dynamic processes in seismic activity zones: The 5th International Conference «Trigger Effects in Geosystems» 4–7 june, 2019, Institute of Geosphere Dynamics of Russian Academy of Sciences In the book series Springer Proceedings in Earth and Environmental Science. P. 87–94. https://doi.org/10.1007/978-3-030-31970-0_10.
- Moore Diane E., Lockner David A. Chemical controls on fault behavior: weakening of serpentinite sheared against quartz-bearing rocks and its significance for fault creep in the San Andreas system // J. Geophys. Res. B. 2013. 118. № 5. С. 2558–2570.
- Sih G.S. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems // Trans. ASME. ser. E. J.Appl. Mech. 1965. № 1. С. 51–58.

MATHEMATICAL MODELING OF NON-STATIONARY PROCESSES IN SEISMIC ACTIVITY ZONE

A. Kim^{1*}, Yu. Shpadi², Yu. Litvinov³

¹*Kazakhstan Scientific Center of the International Eurasian Academy of Sciences, Almaty, Kazakhstan*

²*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

³*Civil Aviation Academy, Almaty, Kazakhstan*

*E-mail: kim.as@mail.ru

The processes of rock transition from undisturbed to dynamic fracture before earthquakes, under conditions of limited source zone volume and compression at great depths, are slow. Such a slowdown can be used for predictive purposes. According to natural waveguides, which are fault zones, these processes in the depths of the lithosphere cause variations in geophysical fields on the Earth's surface, in the atmosphere and ionosphere. In turn, these variations can already be seen by modern ground and satellite observations.

This article presents the results of mathematical and computer modeling of dynamic and quasi-static processes in earthquake focal zones. The motion of an elastic medium in the event of a sudden rupture along a finite strip under longitudinal shear conditions, taking into account contact viscous friction, is investigated. The use of an exact solution to this problem, constructed by the superposition method, is convenient for the first arrivals of reflected waves and is difficult with multiple reflections. In this regard, a different approach has been applied in this paper, which consists in reducing the boundary value problem to the Fredholm integral equation of the 2nd kind in images, the solution of which, under certain conditions, allows us to obtain the parameters of the motion of the medium at an arbitrary time. These conditions are sufficiently large values of the effective viscosity at break when a quasi-static non-stationary process is realized. Applying the method of solving integral equations in images, which uses the Hilbert-Schmidt formula for a resolvent kernel and decomposition of a normalized symmetric kernel into a bilinear series by eigenfunctions, a solution of a quasi-static integral equation in images is obtained. Further, by inverting the solution in the images, the original solution is obtained.

From the conditions of proximity of the approximate (quasi-static) solution and the general (dynamic) solution of the corresponding integral equation, an estimate of the lower bound of the effective viscosity at break is obtained for the transition from solving a dynamic non-stationary problem to solving a quasi-static non-stationary problem. The correspondence of the obtained condition of quasi-static processes to the available experimental laboratory and geophysical data is investigated.

With the help of analytical methods, together with numerical calculation, graphs of quasi-static non-stationary displacements of the rupture shores and the stress intensity coefficient at its ends, depending on background stresses, effective viscosity at the rupture, coordinates and time are obtained. A general solution of the quasi-static problem for displacements and displacement velocities of the rupture shores in the form of a static surface in a normalized coordinate system is obtained. A general solution of the quasi-static problem for the intensity coefficient of tangential stresses at the ends of the rupture in normalized coordinates is obtained.

Keywords: mathematical modeling, non-stationary process, viscous rupture, displacement velocity, stress concentration.